

க.பொ.த. (உயர்தர)ப் பரிட்சை - 2021 (2022)

10 - தினைந்த கணிதம்

புள்ளி வழங்கும் திட்டம்

பத்திரிம் I

பகுதி A

$$= 10 \times 25$$

$$= 250$$

பகுதி B

$$= 05 \times 150$$

$$= 750$$

மொத்தம்

$$= \frac{1000}{10}$$

இறுதி புள்ளி

$$= 100$$

விடைத்தாள்களுக்குப் புள்ளியிடல் - பொது நுட்ப முறைகள்

விடைத்தாள்களுக்குப் புள்ளியிடும் போதும், புள்ளிப்படியில் புள்ளிகளைப் பதியும் போதும் ஒர் அங்கீரிக்கப்பட்ட முறையைக் கட்டப்பிடித்தல் கட்டாயமானதாகும். அதன்பொருட்டு பின்வரும் முறையில் செயற்படவும்.

1. விடைத்தாள்களுக்குப் புள்ளியிடுவதற்கு சிவப்பு நிற குழிழ்முனை பேணாவை பயன்படுத்தவும்.
2. சகல விடைத்தாள்களினதும் முதற்பக்கத்தில் உதவிப் பரிசுகளின் குறியீடுகளைக் குறிப்பிடவும். இலக்கங்கள் எழுதும்போது தெளிவான கீலக்கத்தில் எழுதவும்.
3. இலக்கங்களை எழுதும்போது பிழைகள் ஏற்பட்டால் அவற்றைத் தளிக்கோட்டால் கீறிவிட்டு, மீண்டும் பக்கத்தில் சரியாக எழுதி, சிற்றொப்பத்தை இடவும்.
4. ஒவ்வொரு வினாவினதும் உபகுதிகளின் விடைகளுக்காக பெற்றுக்கொண்ட புள்ளியை பதியும் போது அந்த வினாப்பகுதிகளின் இறுதியில் □ இன் உள் பதியவும். இறுதிப் புள்ளியை வினா இலக்கத்துடன் □ இன் உள் பின்னமாகப் பதியவும். புள்ளிகளைப் பதிவதற்கு பரிசுக்களுக்காக ஒதுக்கப்பட்ட நிரலை உபயோகிக்கவும்.

உதாரணம் - வினா இல 03

(i)

.....



(ii)

.....



(iii)

.....



03

$$(i) \frac{4}{5} + (ii) \frac{3}{5} + (iii) \frac{3}{5} = \boxed{\frac{10}{15}}$$

பல்தேர்வு விடைத்தாள் (துளைத்தாள்)

1. க.பா.த.உ. தரி மற்றும் தகவல் நொழிநுட்பப் பரிட்சைக்கான துளைத்தாள் தினாணக்களத்தால் வழங்கப்படும். சரிபாக துளையிடப்பட்டு அந்தாட்சிப்படுத்திய துளைத்தாள் தங்களுக்கு கிடைக்கப்பெறும். அந்தாட்சிப்படுத்திய துளைத்தாளைப் பயன்படுத்துவது பரிசுகரின் கடமையாகும்.
2. அதன் பின்னர் விடைத்தாளைநன்கு பரிசுவித்துப் பார்க்கவும். ஏதாவது வினாவுக்கு, ஒரு விடைக்கும் அதிகமாக குறியிட்டிருந்தாலோ, ஒரு விடைக்காவது குறியிடப்படாமலிருந்தாலோ தெரிவுகளை வெட்டிக்கூழியதாக கோடொன்றைக் கீறவும். சில வேளைகளில் பரிசுந்து முன்னர் குறிப்பிட்ட விடையை அழித்துவிட்டு வேறு விடைக்குக் குறியிட்டிருக்க முடியும். அவ்வாறு அழித்துள்ள போது நன்கு அழிக்காது விட்டிருந்தால், அவ்வாறு அழிக்கப்பட்ட தெரிவின் மீதும் கோழவும்.
3. துளைத்தாளை விடைத்தாளின் மீது சரியாக வைக்கவும். சரியான விடையை ✓ அடையாளத்தாலும் பிழையான விடையை ○ அடையாளத்தாலும் இறுதி நிரலில் அடையாளமிடவும். சரியான விடைகளின் எண்ணிக்கையை அவ்வள் தெரிவுகளின் இறுதி நிரையின் கீழ் அந்துடன் அவற்றை கூட்டி சரியான புள்ளியை உரிய கட்டத்தில் எழுதவும்.

கட்டமைப்பு கட்டுரை விடைத்தாள்கள்

1. பரிசார்த்திகளால் விடைத்தாளில் வெறுமையாக விடப்பட்டுள்ள இபங்களையும், பக்கங்களையும் குறுக்குக் கொட்ட வெட்டிவிடும். பிழையான பொருத்தமற்ற விடைகளுக்குக் கீழ் கோட்டும், புள்ளி வழங்கல்வடிய இபங்களில் ✓ அடையாளமிட்டு அதைக் காட்டவும்.
2. புள்ளிகளை ஒவ்வொர் கடதாசிபின் இடது பக்கத்தில் ஒரிக்கலும்.
3. ககல விளாக்களுக்கும் கொடுத்த மூழ்ப் புள்ளியை விடைத்தாளின் முன் பக்கத்திலுள்ள பொருத்தமான பெட்டியிலுள்ள விளா இலக்கத்திலிருந்து ஞோக 2 இலக்கங்களில் உள்ள அறிவுபூர்த்தியின் படி விளாக்கள் தெரிவ செய்யப்படல் வேண்டும். எல்லா விளாக்களினதும் புள்ளிகளும் முதல் பக்கத்தில் பதியப்பட்ட பின் விடைத்தாளில் மேலதிகமாக எழுதப்பட்டிருக்கும் விளாக்களின் புள்ளிகளில் குறைவான புள்ளிகளை வெட்டி விடுவும்.
4. மொத்த புள்ளிகளை கவனமாக கூட்டி முன் பக்கத்தில் உரிய கவுடல் பதியவும், விடைத்தாளில் வழங்கப்பட்டுள்ள விடைகளுக்கான புள்ளியை மீண்டும் பரிசீலித்த பின் முன்னால் பதியவும், ஒவ்வொரு விளாக்களுக்கும் வழங்கப்படும் புள்ளிகளை உரிய விடத்தில் எழுதுவும்.

புள்ளிப்பட்டியல் தயாரித்தல்

இம்முறை ககல பாபங்களுக்குமான இறுதிப்புள்ளி குழுவினால் களிப்பிப்பொட்டாது. இது தனிர் ஓவ்வாரு விளாப் பக்கத்திற்குமான இறுதிப்புள்ளி தனித்தனியாக புள்ளிப்பட்டியலில் பதியப்பட வேண்டும். பத்திரிக I ற்கான பல்தேர்வு விளாப்பத்திற்கும் மட்டும் இருப்பின் புள்ளிகள் இலக்கத்திலும் எழுதிலும் பதியப்பட வேண்டும்.



1. கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கும் $\sum_{r=1}^n (6r+1) = n(3n+4)$ என நிறுவுக.

$$n=1, \text{ இற்கு இ.கை. ப. } = 6+1=7$$

$$\text{வ.கை. ப. } = 1(3+4) = 7$$

$$n=1, \text{ இற்கு பேறு உண்மையானது}$$

5

For verifying the result for $n=1$

k யாதாயினும் நேர் நிறை எண் என்க

$n=k$ இட்கு பேறு உண்மையானது எனக் கொள்வோம்

$$\sum_{r=1}^k (6r+1) = k(3k+4).$$

5

For writing the statement for $n=k$

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{k+1} (6r+1) &= \sum_{r=1}^k (6r+1) + \{6(k+1)+1\} \\ &= k(3k+4) + 6k + 7 \\ &= 3k^2 + 10k + 7 \\ &= (k+1)(3k+7). \\ &= (k+1)[3(k+1)+4]. \end{aligned}$$

5

For substituting " $n=k$ result"
in " $n=k+1$ "

5

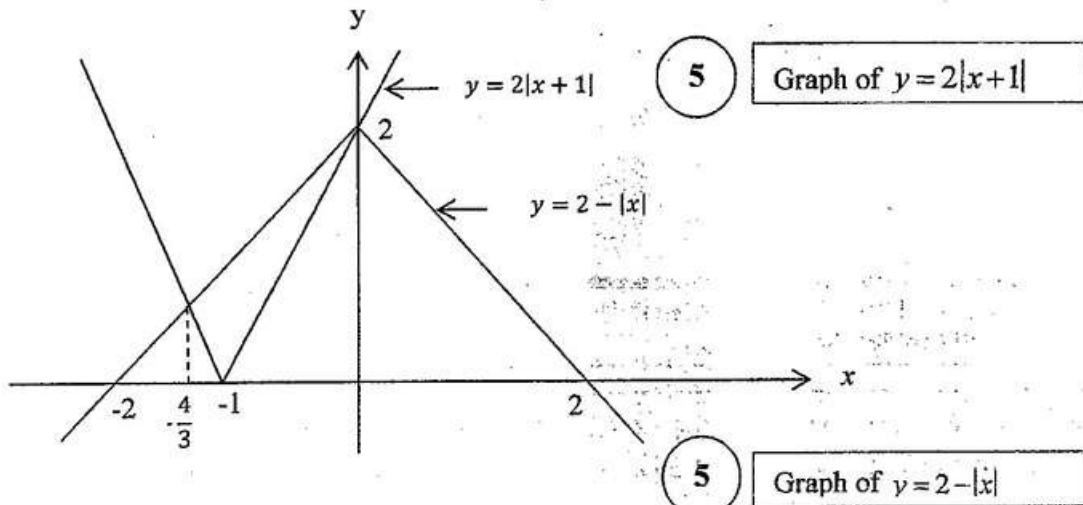
 $(k+1)(3k+7)$ or equivalent seen

ஆகவே இற்கு $n=k$, பேறு உண்மையானதெனின் $n=k+1$ இற்கும் பேறு உண்மையாகும். $n=1$ இற்கு பேறு உண்மையானது என்று நாம் ஏற்கனவே நிறுவியுள்ளோம் இதிலிருந்து கணித தொகுத்தறிவுக் கோட்பாடிற்கேட்ப எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$ இறக்கும் பேறு உண்மையானதாகும்

5

conclusion with the "Principle of Mathematical Induction". (Given only if all the other steps are correct.)

2. ஒரே வரிப்படத்தில் $y = 2|x+1|$, $y = 2 - |x|$ ஆகியவற்றின் வரைபுகளைப் பரும்படியாக வரைக. இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக, சமனிலி $2|x+1| + |x| \leq 4$ ஜுத் திருப்தியாக்கும் x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களையும் காண்க.



ஒரு வெட்டுப்புள்ளியின் x – ஆள்கூறு $x = 0$.

மற்றய வெட்டுப்புள்ளியின் x – ஆள்கூறு $x < -1$ இற்கு

$$-2(x+1) = 2 + x \text{ இனால் தரப்படும்}$$

$$\text{இதிலிருந்து } x = -\frac{4}{3}.$$

5

$$x = 0 \text{ and } x = -\frac{4}{3} \text{ seen}$$

$$t = \frac{x}{2}, \text{ என்க.}$$

5

$$t = \frac{x}{2} \text{ substitution or equivalent}$$

தரப்பட்ட சமனிலி

$$2|2t+2| + |2t| \leq 4. \text{ என ஆகும்}$$

இது $2|t+1| \leq 2 - |t|$. இற்கு சமானமாகும்

வரைபிலிருந்து

$$-\frac{4}{3} \leq t \leq 0.$$

5

$$\therefore -\frac{8}{3} \leq x \leq 0.$$

correct solution seen

Aliter 1:வரைபுக்கு **5** + **5**,**Case (i)** $x \leq -2$:எனின், $2|x+2| + |x| \leq 4 \Leftrightarrow -2(x+2) - x \leq 4$.

$$\therefore -\frac{8}{3} \leq x.$$

ஆகவே தீர்வுகள் $-\frac{8}{3} \leq x \leq -2$ ஜத் திருப்தியாக்கும் x இன் பெறுமானங்களாகும்.**Case (ii)** $-2 < x \leq 0$:எனின், $2|x+2| + |x| \leq 4 \Leftrightarrow 2(x+2) - x \leq 4$.

$$\therefore x \leq 0.$$

ஆகவே $-2 < x \leq 0$ ஜத் திருப்தியாக்கும் x இன் பெறுமானங்களாகும்.**Case (iii)** $x > 0$:எனின், $2|x+2| + |x| \leq 4 \Leftrightarrow 2(x+2) + x \leq 4$

$$\therefore x \leq 0$$

ஆகவே தீர்வுகள் இல்லை.

All 3 cases with correct solutions

10

only 2 cases with correct solutions

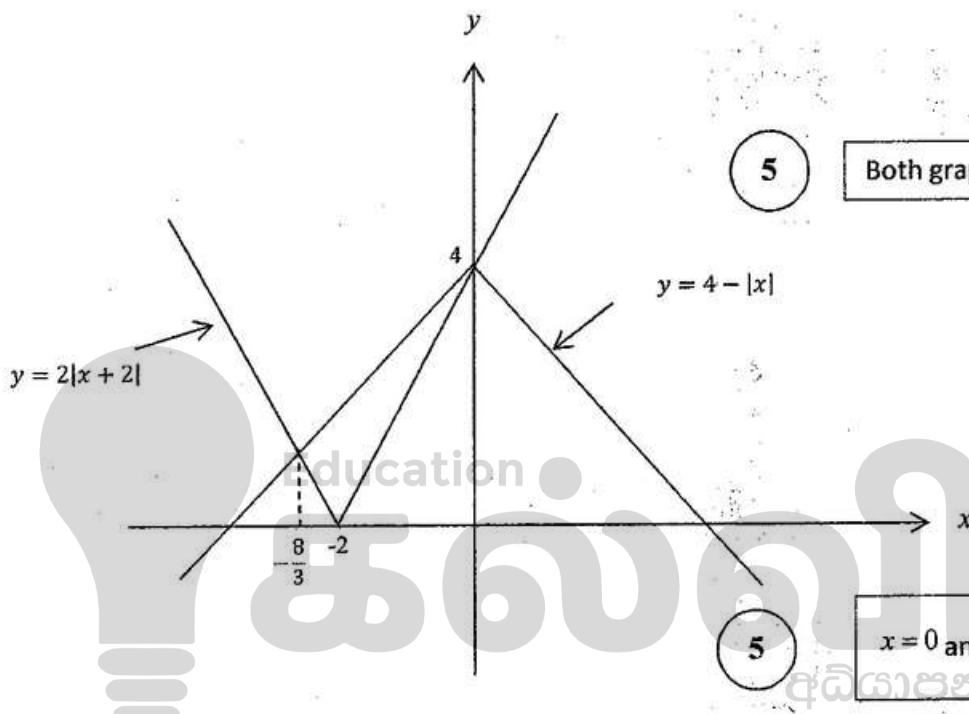
5
 \therefore தரப்பட்ட சமனிலியின் தீர்வுகள் $-\frac{8}{3} \leq x \leq 0$. ஜத் திருப்தியாக்கும் x இன்

பெறுமானங்களாகும்

5

Aliter 2:வரைபுக்கு **5** + **5**

$$2|x+2| + |x| \leq 4 \Leftrightarrow 2|x+2| \leq 4 - |x|.$$



வரைபிலிருந்து,

$$2|x+2| \leq 4 - |x|$$

$$\Leftrightarrow -\frac{8}{3} \leq x \leq 0$$

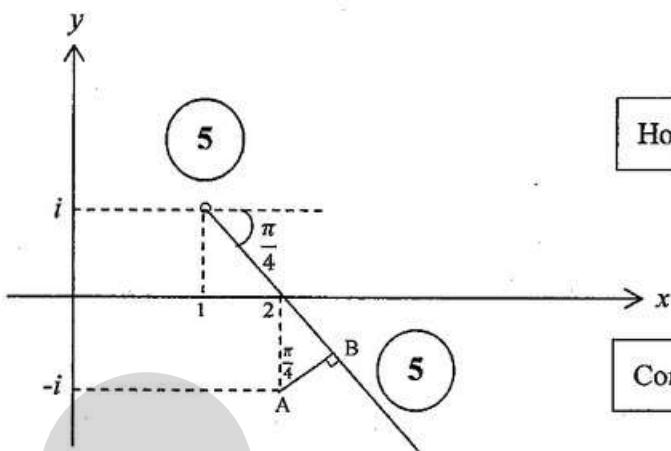
5

correct solution seen

3. ஒர் ஆகண் வரிப்படத்தில், $\text{Arg}(z - 1 - i) = -\frac{\pi}{4}$ ஜத் திருப்தியாக்கும் சிக்கலெண்கள் z கீழ் வகைகுறிக்கும் புள்ளிகளின் ஒழுக்கைப் பரும்படியாக வரைக.

இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக, $\text{Arg}(iz + 1 - i) = \frac{\pi}{4}$ ஜத் திருப்தியாக்கும் $|z - 2 + i|$ இன் இழிவுப் பெறுமானம் $\frac{1}{\sqrt{2}}$ எனக் காட்டுக.

$$\text{Arg}(z - (1+i)) = -\frac{\pi}{4}$$



Hole at $1+i$

Correct half line

$$\text{Arg}(i(z - i - 1)) = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \text{Arg } i + \text{Arg}(z - (1+i)) = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \text{Arg}(z - (1+i)) = -\frac{\pi}{4}$$

Breaking the argument of the product
to a sum, and using $\text{Arg } i = \frac{\pi}{2}$.

$$\min |z - (2 - i)| = AB$$

5

Recognising the minimum distance

$$= 1 \cdot \cos \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

5

Work leading to the answer

Aliter:

வரைபடத்துக்கு 5 + 5

$$z = x + iy \text{ என்க}$$

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arg}(iz + 1 - i) = \operatorname{Arg}(1 - y + i(x - 1))$$

$$\begin{aligned} \therefore x - 1 &= (1)(1 - y) \\ \Rightarrow x + y &= 2. \end{aligned} \quad \text{5}$$

Writing the given information as a relation of x and y .

$$\begin{aligned} |z - 2 + i| &= |x + iy - 2 + i| \\ &= |(x - 2) + i(y + 1)| \\ &= |y + i(y + 1)| \quad (\because x - 2 = y) \\ &= \sqrt{y^2 + (y + 1)^2} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{2\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \quad \text{5}$$

Writing the absolute value as a complete square of x or y .

$$\geq \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ ஏனெனில் } 2\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0; \quad y = -\frac{1}{2} \text{ ஆகும்போது } = \text{ஆகும்.}$$

அவியாபந

$$\therefore \min |z - 2 + i| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{5}$$

Work leading to the answer.

4. $k > 0$ எனக் கொள்வோம். $\left(x^2 + \frac{k}{x}\right)^{11}$ இன் ஈருப்பு விரியில் உள்ள x^7 இன் குணகமும் $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{11}$ இன் ஈருப்பு விரியில் உள்ள x^{-7} இன் குணகமும் சமமெனத் தரப்பட்டுள்ளது. $k = 1$ எனக் காட்டுக.

$k > 0. \left(x^2 + \frac{k}{x}\right)^{11}$; இற்கு

$$T_{r+1} = {}^{11}C_r (x^2)^{11-r} \left(\frac{k}{x}\right)^r = {}^{11}C_r x^{22-3r} k^r$$

$$22 - 3r = 7 \Rightarrow r = 5$$

5

Correct value of r

$$\therefore x^7 \text{ இன் குணகம் } = {}^{11}C_5 k^5$$

5

Correct coefficient

$$\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{11}; \text{ இற்கு } T_{r+1} = {}^{11}C_r x^{11-r} (-1)^r \left(\frac{1}{x^2}\right)^r = (-1)^r {}^{11}C_r x^{11-3r}$$

$$11 - 3r = -7 \Rightarrow r = 6$$

5

Correct value of r

$$\therefore x^{-7} \text{ இன் குணகம் } = {}^{11}C_6$$

5

Correct coefficient

ஆகவே, ${}^{11}C_6 = {}^{11}C_5 k^5 \Rightarrow k = 1$, ஏனெனில் ${}^{11}C_6 = {}^{11}C_5$.

5

Work leading to the answer

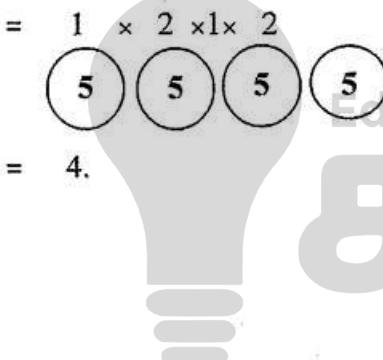
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x - \sin 2x}{x^2(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})} = 4$ எனக் காட்டுக.

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x - \sin 2x}{x^2(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{\cos 2x} - \sin 2x}{x^2(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})} \times \frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \quad 5 \quad \boxed{\text{Multiplying by the conjugate}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{(1 - \cos 2x)}{x^2 \cos 2x} \times (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) \\
 &= \left(\lim_{2x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \right) \times \lim_{x \rightarrow 0} 2 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 2x} \right) \times \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) \\
 &= \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} \quad \boxed{\text{Each limit } 5} \\
 &= 4.
 \end{aligned}$$

Education

Each limit

5



அவியாஜன

Aliter 1:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x - \sin 2x}{x^2 (\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x(1 - \cos 2x)}{x^2 \cos 2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \times \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$$

5

multiplying by the conjugate

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x(1 - \cos^2 2x)}{x^2 \cos 2x(1 + \cos 2x)} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{2x}$$

$$= 4 \left(\lim_{2x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \right)^3 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 2x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos 2x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{2x} \right)$$

$$= 4 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} \times 2$$

5

5

5

5

Each limit

5

= 4.

கல்வி
அடியாளம்

Aliter2:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x - \sin 2x}{x^2 (\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})}$$

5

multiplying by the conjugate

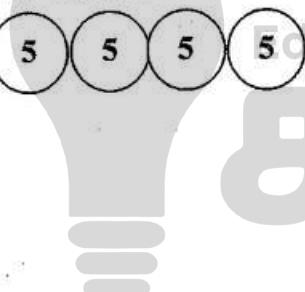
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \times \left(\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} - \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \right) \frac{1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \times \frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x (2 \tan^2 x)}{x^2 (1 - \tan^4 x)} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{2x}$$

$$= 2 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right)^3 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \right)^3 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \tan^4 x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \right)$$

$$= 2 \times 1 \times 1 \times 1 \times 2$$

$$= 4.$$



Each limit

5

kalvi

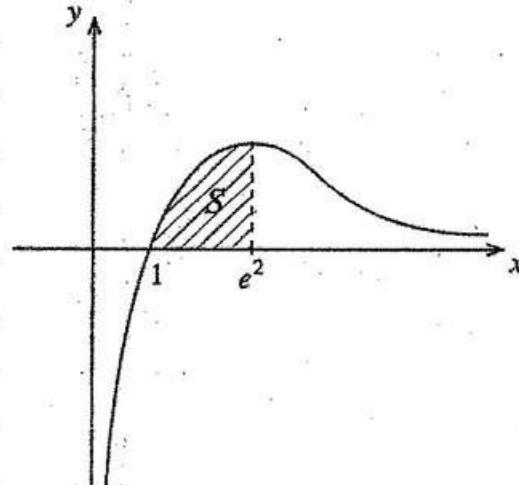
அடியாபந

Setting up the integral for S

6. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $y = 0$, $x = e^2$ ஆகிய வளையிகளினால் உள்ளடைக்கப்படும் பிரதேசம் S எனக் கொள்வோம்.

S இன் பரப்பளவு 4 சதுர அலகுகளைக் காட்டுக்.

பிரதேசம் S ஆனது x -அச்சைப் பற்றி 2π ஆண்யங்களினாடாகச் சுழற்றப்படுகின்றது. இவ்வாறு பிறப்பிக்கப்படும் திண்மத்தின் கனவளவு $\frac{8\pi}{3}$ எனக் காட்டுக்.



$$\text{பரப்பு } S = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx \quad (5)$$

$$= (\ln x) \cdot 2x^{\frac{1}{2}} \Big|_1^{e^2} - \int_1^{e^2} 2x^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{x} dx \quad (5)$$

$$= 4e - 2 \int_1^{e^2} x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= 4$$

Integration by parts or equivalent

(5)

Work leading to the answer

$$\text{தேவையான கனவளவு} = \int_1^{e^2} \pi \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \right)^2 dx \quad (5)$$

Setting up the integral for the volume

$$= \pi \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^2}{x} dx$$

$$= \pi \frac{(\ln x)^3}{3} \Big|_1^{e^2}$$

$$= \frac{8\pi}{3}$$

Work leading to the answer

7. $t \neq 0$ இற்கு $x = ct$, $y = \frac{c}{t}$ ஆகியவற்றினால் பரமானமுறையாகத் தற்பட்டும் செங்கோண அதிபரவளைவுக்குப் புள்ளி $P \equiv \left(cp, \frac{c}{p} \right)$ இல் உள்ள தொடலிக் கோட்டின் சமன்பாடு $x + p^2y = 2cp$ எனக் காட்டுக.

இவ்வதிபரவளைவுக்குப் P இல் உள்ள செவ்வன் கோடு அதிபரவளைவை வேற்றாரு புள்ளி $Q \equiv \left(cq, \frac{c}{q} \right)$ இல் மறுபடியும் சந்திக்கின்றது. $p^3q = -1$ எனக் காட்டுக.

$$\frac{dx}{dt} = c, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{c}{t^2}. \quad (t \neq 0.)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{c}{t^2}}{c} = -\frac{1}{t^2} \quad \text{5}$$

$\frac{dy}{dx}$ in terms of t

$$\therefore P \text{ இல் தொடலியின் படித்திறன் } = -\frac{1}{t^2} \Big|_{t=p} = -\frac{1}{p^2}$$

$\therefore P$ இல் தொடலியின் சமன்பாடு

$$y - \frac{c}{p} = -\frac{1}{p^2}(x - cp)$$

Work leading to the answer

$$\therefore x + p^2y = 2cp.$$

$$P \text{ இல் செவ்வனின் படித்திறன் } = p^2.$$

Equation of the normal

$$\therefore P \text{ இல் செவ்வனின் சமன்பாடு } y - \frac{c}{p} = p^2(x - cp) \quad \text{5}$$

$Q \equiv \left(cq, \frac{c}{q} \right)$ இக்கோட்டில் இருக்கும்;

$$\therefore \frac{c}{q} - \frac{c}{p} = p^2(cq - cp) \Rightarrow c(p - q) = -p^3qc(p - q)$$

5

For the substitution

P, Q வேறுவேறான புள்ளிகள் என்பதால் $p \neq q$.

$$p^3q = -1.$$

5

Work leading to the answer

Aliter: (For the last part)

5

For the condition

PQ இன் படித்திறன் $= P$ இல் செவ்வனின் படித்திறன்

$$\therefore \frac{\frac{c}{q} - \frac{c}{p}}{cq - cp} = p^2 \quad \text{5}$$

($\because p \neq q, c \neq 0$)

For the substitutions

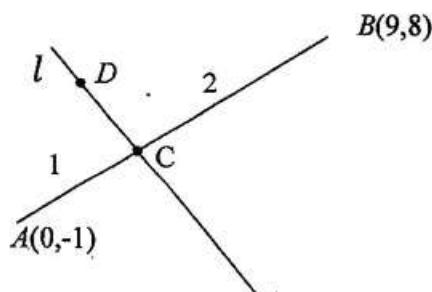
$$\therefore p^3q = -1$$

5

Work leading to the answer

8. $A \equiv (0, -1)$ எனவும் $B \equiv (9, 8)$ எனவும் கொள்வோம். AB மீது புள்ளி C ஆனது $AC:CB = 1:2$ ஆக இருக்குமாறு உள்ளது. C இனாடாக AB இங்குச் செங்குத்தாக உள்ள நேர்கோடு l இன் சமன்பாடு $x+y-5=0$ எனக் காட்டுக.

AD ஆனது நேர்கோடு $y = 5x + 1$ இங்குச் சமாந்தரமாக இருக்குமாறு l மீது உள்ள புள்ளி D எனக் கொள்வோம். D இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.



$$C \equiv \left(\frac{2(0)+1(9)}{2+1}, \frac{2(-1)+1(8)}{2+1} \right)$$

5

$$\equiv (3, 2)$$

Coordinates of C AB இன் பாடித்திறன் = 1.இன் பாடித்திறன் $l = -1$ $\therefore l$: இன் சமன்பாடு

$$y - 2 = -1(x - 3)$$

$$\text{i.e. } x + y - 5 = 0.$$

5

For the gradient of l D, l இல் இருப்பதால் D ஜ $(t, 5-t)$, $t \in \mathbb{R}$ என எடுக்குக,

$$AD$$
 இன் சமன்பாடு; $y - (-1) = 5(x - 0)$

 D இக்கோட்டில் இருப்பதால்,

$$5 - t + 1 = 5t.$$

$$\therefore t = 1.$$

5

Work leading to the equation of l

$$\therefore D \equiv (1, 4).$$

5

Work leading to the coordinates of D $D \equiv (1, 4)$ seen

9. நேர்கோடு $x + 2y = 3$ ஆனது வட்டம் $S \equiv x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$ ஜி இரு வேறுவேறான புள்ளிகளில் இடைவெட்டுகின்றதெனக் காட்டுக.
இவ்விரு புள்ளிகளினுடாகவும் வட்டம் $S = 0$ இன் மையத்தினுடாகவும் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$$S \equiv x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\ell: x + 2y - 3 = 0. \text{ என்க}$$

$$\ell, \text{இல் } x = 3 - 2y;$$

$$(3 - 2y)^2 + y^2 - 4(3 - 2y) + 1 = 0$$

$$\therefore 5y^2 - 4y - 2 = 0$$

5

Forming a quadratic

$$\text{பிரித்துக்கட்டி } \Delta = 16 + 4(5)(2)$$

5

Writing the discriminant

$$\therefore \Delta > 0, \text{ஆதலால் கோடு } x + 2y = 3,$$

5

For $\Delta > 0$

S உடன் இரண்டு வேறு வேறு புள்ளிகளில் இடைவெட்டும்.

தேவையான வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 - 4x + 1 + \lambda(x + 2y - 3) = 0,$$

5

For the λ form

இங்கு $\lambda \in \mathbb{R}$

இவ்வட்டம் (2,0) ஊடாக செல்லும் ஆதலால்,

$$4 - 8 + 1 + \lambda(2 - 3) = 0$$

$$\therefore \lambda = -3$$

5

 $\lambda = -3$ seen

\therefore தேவையான வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 - 4x + 1 + (-3)(x + 2y - 3) = 0$$

$$\text{i.e. } x^2 + y^2 - 7x - 6y + 10 = 0.$$

10. $2\cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 1$ ஐ வடிவம் $R \cos(2x - \alpha)$ இல் எடுத்துரைக்க; இங்கு $R > 0$ உம் $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ உம் ஆகும்.
இதிலிருந்து, சமன்பாடு $\cos^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x = 1$ ஐத் தீர்க்க.

$$2\cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 1$$

$$= 2\cos^2 x - 1 + \sqrt{3}(2\sin x \cos x)$$

$$= \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x$$

$$= 2 \left[\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x \right]$$

$$= 2 \cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right)$$

5

Writing the expression using
 $\cos 2x$ and $\sin 2x$

இங்கு $R = 2$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$

5

5

R = 2 seen

 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ seen

சமன்பாடு $\cos^2 x + \sqrt{3} \sin x = 1$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 1 = 1.$$

$$\therefore 2 \cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = 1$$

$$\text{ஆகவே } \cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \quad 5$$

$$\therefore 2x - \frac{\pi}{3} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}; n \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore x = n\pi + \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{6}; n \in \mathbb{Z}$$

5

$\cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}$ seen

Correct solution seen

11. (a) $k > 1$ எனக் கொள்வோம். சம்பாடு $x^2 - 2(k+1)x + (k-3)^2 = 0$ இற்கு வேறுவேறான மெய்ம் மூலங்கள் இருக்கின்றனவெனக் காட்டுக.

α, β ஆகியன இம்மூலங்களைக் கொள்வோம். $\alpha + \beta, \alpha\beta$ ஆகியவற்றை k இல் எழுதி, α, β ஆகிய இரண்டும் நேராக இருக்குமாறு k இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இப்போது $1 < k < 3$ எனக் கொள்வோம். $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டை k இல் காண்க.

(b) $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 1$ எனவும் $g(x) = x^3 + cx^2 + ax + 1$ எனவும் கொள்வோம்; இங்கு $a, b, c \in \mathbb{R}$ ஆகும். $f(x)$ ஆனது $(x-1)$ இனால் வகுக்கப்படும்போது மீதி 5 எனவும் $g(x)$ ஆனது $x^2 + x - 2$ இனால் வகுக்கப்படும்போது மீதி $x + 1$ எனவும் தரப்பட்டுள்ளது. a, b, c ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

மேலும் a, b, c ஆகியவற்றுக்கான இப்பெறுமானங்களுடன் எல்லா $x \in \mathbb{R}$ இற்கும் $f(x) - 2g(x) \leq \frac{13}{12}$ எனக் காட்டுக.

(a)

$$x^2 - 2(k+1)x + (k-3)^2 = 0. \text{ இன் பிரித்துக்காட்டி}$$

$$\Delta = 4(k+1)^2 - 4(k-3)^2$$

5

$$= 4(k+1+k-3)(k+1-k+3)$$

$$= 32(k-1).$$

$$k > 1, \text{ ஆதலால் } \Delta > 0.$$

∴ மெய்யான வேறு வேறான மூலங்கள் உண்டு

5

20

$$\alpha + \beta = 2(k+1), \alpha\beta = (k-3)^2 +$$

5

5

α, β இரண்டும் நேரானதாக இருக்க,

$$\alpha + \beta > 0, \alpha\beta > 0.$$

10

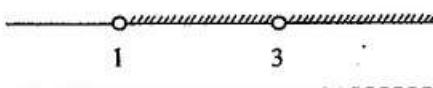
$$k > 1, \text{ ஆதலால் } \alpha + \beta = 2(k+1) > 0$$

5

அத்துடன் $\alpha\beta = (k-3)^2 > 0 \Leftrightarrow k \neq 3$.

10

∴ k இன் தேவையான பெறுமானங்கள் $1 < k < 3$ or $k > 3$.



35

இப்போது $1 < k < 3$. என்க. $\alpha > 0$, $\beta > 0$. ஆதலால்

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \frac{1}{\sqrt{\beta}} \text{ இனை மூலங்களாக கொண்ட சமன்பாடு } \left(x - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right) \left(x - \frac{1}{\sqrt{\beta}} \right) = 0. \quad (5)$$

$$\text{i.e. } x^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \right) x + \frac{1}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}} = 0. \quad (5)$$

$$\text{i.e. } \sqrt{\alpha\beta}x^2 - (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})x + 1 = 0. \quad (5)$$

$$\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{(k-3)^2} = |k-3| = 3-k \quad (\because 1 < k < 3) \text{ ஆகும்} \quad (5)$$

$$\text{அத்துடன் } (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} \quad (5)$$

$$= 2(k+1) + 2(3-k) \quad (5)$$

$$= 8. \quad (5)$$

$$\therefore \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 2\sqrt{2} \quad (5)$$

$$\therefore \text{சமன்பாடு } (3-k)x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0 \quad (5)$$

45

(b)

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 1$$

$$g(x) = x^3 + cx^2 + dx + 1$$

$f(x), (x-1)$ இனால் வகுப்படும் போது மீதி 5 ஆதலால், மீதி தேற்றத்தின் படி,

$$f(1) = 5. \quad (5)$$

$$\therefore a+b+3=5$$

$$a+b=2. \quad (5) \quad \dots \quad (1)$$

$g(x)$ ஆனது $x^2 + x - 2$ இனால் வகுப்படும் போது மீதி $x+1$, ஆதலால்

$$g(x) = x^3 + cx^2 + dx + 1 = (x^2 + x - 2)(x + \lambda) + x + 1 \text{ for } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

$$((x^0)); 1 = -2\lambda + 1 \Rightarrow \lambda = 0.$$

$$\therefore g(x) = x(x^2 + x - 2) + x + 1 \\ = x^3 + x^2 - x + 1. \text{ ஆகவே } c = 1, a = -1.$$

$$(1) \Rightarrow b = 3. \quad (5)$$

30

$$f(x) - 2g(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 1 - 2(x^3 + x^2 - x - 1)$$

$$= -3x^2 + 5x - 1$$

5

$$= -3 \left[\left(x - \frac{5}{6} \right)^2 - \frac{25}{36} + \frac{1}{3} \right]$$

$$= -3 \left[\left(x - \frac{5}{6} \right)^2 - \frac{13}{36} \right]$$

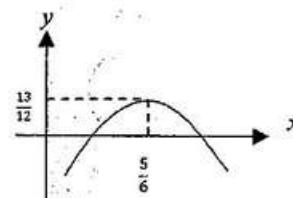
5

$$\leq -3 \times \left(\frac{-13}{36} \right), \text{ since } \left(x - \frac{5}{6} \right)^2 \geq 0.$$

5

$$\therefore f(x) - 2g(x) \leq \frac{13}{12}.$$

5

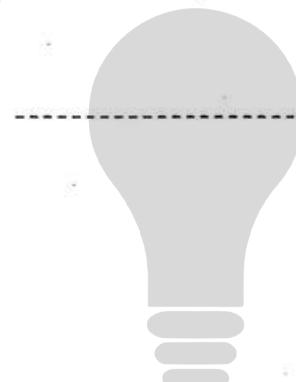


20

Education

கல்வி

அடியாணதா



12. (a) கீழே தரப்பட்டுள்ள 10 இலக்கங்களிலிருந்தும் எடுக்கப்படும் 4 இலக்கங்களைக் கொண்ட ஒரு 4 இலக்க எண்ணை அமைக்க வேண்டியுள்ளது :

1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5

(i) தெரிந்தெடுக்கப்படும் எல்லா 4 இலக்கங்களும் வேறுபட்டனவாக இருப்பின்,

(ii) எந்த 4 இலக்கங்களும் தெரிந்தெடுக்கப்படலாமெனின்,

அமைக்கத்தக்க அத்தகைய வேறுபட்ட 4 இலக்க எண்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(b) $r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $U_r = \frac{-16r^3 + 12r^2 + 40r + 9}{5(2r+1)^2(2r-1)^2}$ எனக் கொள்வோம்.

$r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $U_r = \frac{A(r-1)}{(2r+1)^2} - \frac{(r-B)}{(2r-1)^2}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக A, B ஆகிய மெய்ம் மாறிலிகளின் பெறுமானங்களைத் துணிக.

இதிலிருந்து, $r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $\frac{1}{5^{r-1}} U_r = f(r) - f(r-1)$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக $f(r)$ ஐக் கண்டு,

$n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $\sum_{r=1}^n \frac{1}{5^{r-1}} U_r = 1 + \frac{n-1}{5^n(2n+1)^2}$ எனக் காட்டுக.

முடிவில் தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{5^{r-1}} U_r$ ஒருங்குகின்றதென உய்த்தறிந்து, அதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

(a)

1,1, 1, 2, 2, 3,3,4, 5, 5

(i) 1,2,3,4,5 இலிருந்து நான்கு வேறான இலக்கங்கள்

$$={}^5P_4$$

5

$$= 5!$$

5

$$= 120$$

5

15

(ii) நான்கு இலக்க எண்கள் உருவாக்கப்படும் விதங்கள்

ஏதாவது 4 இலக்கங்களுடன் வேறுவேறான 4 இலக்க எண்கள்	
வேறான இலக்கங்கள்	${}^5P_4 = 120$
ஒரு இலக்கம் இருமுறை மீன்வர ஏணைய இரு இலக்கங்களும் வேறானவை	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> 10 5 </div> ${}^4C_1 \times {}^4C_2 \times \frac{4!}{2!} = 288$
இரு இலக்கங்கள் இருமுறை மீன்வரல்	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> 10 5 </div> ${}^4C_2 \times \frac{4!}{2!2!} = 36$
ஒரு இலக்கம் மும்முறை மீன்வரல்	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> 10 5 </div> ${}^1C_1 \times {}^4C_1 \times \frac{4!}{3!}$

தேவையான வழிகள் = $120 + 288 + 36 + 16$
 $= 460$

5

55

(b)

 $r \in \mathbb{Z}$ இற்கு

$$U_r = \frac{-16r^3 + 12r^2 + 40r + 9}{5(2r+1)^2(2r-1)^2}$$

$$U_r = \frac{A(r-1)}{(2r+1)^2} - \frac{(r-B)}{(2r-1)^2} = \frac{A(r-1)(2r-1)^2 - (r-B)(2r+1)^2}{(2r+1)^2(2r-1)^2}$$

$$\therefore -16r^3 + 12r^2 + 40r + 9 = 5A(r-1)(4r^2 - 4r + 1) - 5(r-B)(4r^2 + 4r + 1)$$

 r இன் அடுக்குகளின் குணகங்களை ஒப்பிட:

$$r^3 : -16 = 5A(4) - 20$$

$$r^2 : 12 = 5A(-8) - 5(-4B + 4)$$

10

$$r^1 : 40 = 25A - 5(1-4B)$$

$$r^0 : 9 = -5A + 5B$$

இதிலிருந்து $A = \frac{1}{5}$, $B = 2$.

5

5

20

$$\therefore U_r = \frac{r-1}{5(2r+1)^2} - \frac{r-2}{(2r-1)^2} \quad 5$$

$$\therefore \frac{1}{5^{r-1}} U_r = \frac{r-1}{5^r (2r+1)^2} - \frac{r-2}{5^{r-1} (2r-1)^2} \quad 5$$

எனவே,

$$\frac{1}{5^{r-1}} U_r = f(r) - f(r-1), \text{ இங்கு } f(r) = \frac{r-1}{5^r (2r+1)^2}. \quad 10$$

$$r = 1;$$

$$\frac{1}{5^0} U_1 = f(1) - f(0)$$

$$r = 2;$$

$$\frac{1}{5} U_2 = f(2) - f(1)$$

⋮ ⋮

$$r = n-1;$$

$$\frac{1}{5^{n-2}} U_{n-1} = f(n-1) - f(n-2)$$

$$r = n$$

$$\frac{1}{5^{n-1}} U_n = f(n) - f(n-1)$$

5

10

5

$$\sum_{r=1}^n \frac{1}{5^{r-1}} U_r = f(n) - f(0) \quad 5$$

$$= \frac{n-1}{5^n (2n+1)^2} - (-1) \quad 5$$

$$= 1 + \frac{n-1}{5^n (2n+1)^2} \text{ for } n \in \mathbb{Z}^+ \quad 5$$

45

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^n \frac{1}{5^{r-1}} U_r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n-1}{5^n (2n+1)^2} \right) \\ = 1 . \quad \text{5}$$

∴ முடிவிலித்தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{5^{r-1}} U_r$, ஒருங்கும், கூட்டுத்தொகை 1.

5

15



13. (a) $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 3 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ எனவும் $B = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ எனவும் கொள்வோம்; இங்கு $a \in \mathbb{R}$.

மேலும் $C = AB^T$ எனவும் கொள்வோம். C ஜி a இற் கண்டு, எல்லா $a \neq 0$ இற்கும் C^{-1} இருக்கின்றதெனக் காட்டுக.

C^{-1} இருக்கும்போது அதனை a இல் எழுதுக.

$$C^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 9 \\ -11 \end{pmatrix} \text{ எனின், } a = 2 \text{ எனக் காட்டுக.}$$

a இற்கான இப்பெறுமானத்துடன் $DC - C^T C = 8I$ ஆக இருக்கத்தக்கதாகத் தாயம் D ஐக் காணக்; இங்கு I ஆனது வரிசை 2 ஆகவுள்ள சர்வசமன்பாட்டுத் தாயமாகும்.

(b) $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ எனவும் $z_2 = 1 + i$ எனவும் கொள்வோம். $\frac{z_1}{z_2}$ ஜி வடிவம் $x + iy$ இல் எடுத்துரைக்க; இங்கு $x, y \in \mathbb{R}$.

மேலும் z_1, z_2 ஆகிய சிக்கலெண்கள் ஒவ்வொன்றையும் வடிவம் $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ இல் எடுத்துரைக்க;

$$\text{இங்கு } r > 0 \text{ உம் } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ உம் ஆகும். இதிலிருந்து, } \frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) \text{ எனக் காட்டுக.}$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \text{ என உய்த்தறிக.}$$

(c) $n \in \mathbb{Z}^+$ எனவும் $k \in \mathbb{Z}$ இற்கு $\theta \neq 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ எனவும் கொள்வோம்.

த மோய்வரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, $(1 + i \tan \theta)^n = \sec^n \theta (\cos n\theta + i \sin n\theta)$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $(1 - i \tan \theta)^n$ இற்கு ஒர் இயல்பொத்த கோவையைப் பெற்று,

$$(1 + i \tan \theta)^n + (1 - i \tan \theta)^n = 2 \sec^n \theta \cos n\theta \text{ எனக் காட்டுக.}$$

$$z = i \tan \left(\frac{\pi}{10} \right) \text{ ஆனது } (1+z)^{25} + (1-z)^{25} = 0 \text{ இன் ஒரு தீர்வை உய்த்தறிக.}$$

(a)

5

$$C = AB^T = \begin{pmatrix} a & 0 & 3 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + 3a + 3 \\ a + 1 & 1 \end{pmatrix}$$

10

$$|C| = (a^2 + 3) - (a+1)(a+3) = -4a$$

$$\neq 0 \quad (\because a \neq 0)$$

5

\therefore எல்லா $a \neq 0$ கும் C^{-1} இருக்கும்.

5

25

For $a \neq 0, C^{-1} = -\frac{1}{4a} \begin{pmatrix} 1 & -(a+3) \\ -(a+1) & a^2 + 3 \end{pmatrix}$

10

10

$$C^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4a} \begin{pmatrix} -1 & a+3 \\ a+1-a^2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4a} \begin{pmatrix} 2a+5 \\ -2a^2+a-5 \end{pmatrix}$$

10

$$\therefore \frac{1}{4a} \begin{pmatrix} 2a+5 \\ -2a^2+a-5 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 9 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$\frac{2a+5}{4a} = \frac{9}{8}, \quad \frac{-2a^2+a-5}{4a} = -\frac{11}{8}$$

5

இதிலிருந்து $a=2$.

5

20

$$a=2, C = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, C^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}. \text{ ஆகும்போது}$$

5

$$DC - C^T C = 8I \Leftrightarrow D - C^T = 8IC^{-1}.$$

5

$$\therefore D = C^T + 8C^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}.$$

5

20

(b)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+\sqrt{3}i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)(1-i) = \underbrace{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}_x + i \underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)}_y$$

5

x

5

10

$$z_1 = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

5

5

$$z_2 = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

5

5

$$\therefore \frac{z_1}{z_2} = \frac{2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)}{\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)} = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

10

$$= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

30

மெய்ப்பகுதிகளை சமப்படுத்த,

$$\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \quad \text{5}$$

05

(c)

For $r \in \mathbb{Z}$ and $\theta \neq 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ for $k \in \mathbb{Z}$,

$$(1+i \tan \theta)^n = \frac{1}{\cos^n \theta} (\cos \theta + i \sin \theta)^n \quad \text{5}$$

$$= \sec^n \theta (\cos n\theta + i \sin n\theta) \quad \text{1} \quad \text{5}$$

10

$$(1-i \tan \theta)^n = (1+i \tan(-\theta))^n$$

$$= \sec^n(-\theta) [\cos n(-\theta) + i \sin n(-\theta)]$$

$$= \sec^n \theta (\cos n\theta - i \sin n\theta) \quad \text{2} \quad \text{5}$$

$$\text{1}, \quad \text{2} \Rightarrow (1+i \tan \theta)^n + (1-i \tan \theta)^n = 2 \sec^n \theta \cos n\theta. \quad \text{5} \quad \text{10}$$

$$z = i \tan \left(\frac{\pi}{10} \right) \Rightarrow$$

$$(1+z)^{25} + (1-z)^{25} = \left(1+i \tan \left(\frac{\pi}{10} \right) \right)^{25} + \left(1-i \tan \left(\frac{\pi}{10} \right) \right)^{25}$$

$$= 2 \sec^{25} \left(\frac{\pi}{10} \right) \cos 25 \left(\frac{\pi}{10} \right) \quad \text{5}$$

$$= 0, \text{ as } \cos 25 \left(\frac{\pi}{10} \right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0. \quad \text{5}$$

10

14. (a) $x \neq 0, 2$ இற்கு $f(x) = \frac{4x+1}{x(x-2)}$ எனக் கொள்வோம்.

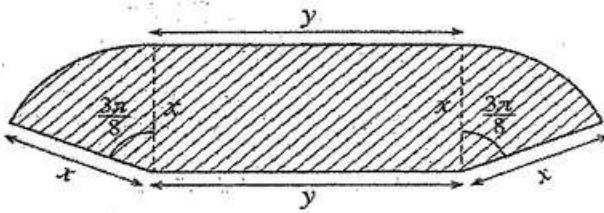
$x \neq 0, 2$ இற்கு $f(x)$ இன் பெறுதி $f'(x)$ ஆனது $f'(x) = -\frac{2(2x-1)(x+1)}{x^2(x-2)^2}$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $f(x)$ அதிகரிக்கும் ஆயிடைகளையும் $f(x)$ குறையும் ஆயிடைகளையும் காண்க.

அணுகுகோடுகள், x -வெட்டுத்துண்டு, திரும்பங் புள்ளிகள் ஆகியவற்றைக் காட்டி $y = f(x)$ இன் வரைபைப் பரும்படியாக வரைக.

இவ்வரைபைப் பயன்படுத்திச் சமனிலி $|f(x)| > 0$ ஜக் திருப்தியாக்கும் x இன் எல்லா மெய்ப் பெறுமானங்களையும் காண்க.

(b) இங்கு உள்ள உருவில் நிழற்றப்பட்டுள்ள பிரதேசம் S ஆனது ஒரு செவ்வகத்தையும் ஒவ்வொன்றும் மையத்தில் கோணம் $\frac{3\pi}{8}$ ஜ எதிரமைக்கும் ஒரு வட்டத்தின் இரு ஆரைச்சிறைகளையும் கொண்ட ஒரு தோட்டத்தைக் காட்டுகின்றது. அதன் பரிமாணங்கள் மீற்றில் உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளன. S இன் பரப்பளவு 36 m^2 எனத் தரப்பட்டுள்ளது. S இன் சுற்றளவு p ம ஆனது $x > 0$ இற்கு $p = 2x + \frac{72}{x}$ இனால் தரப்படுகின்றது எனவும் $x = 6$ ஆக இருக்கும்போது p இழிவு எனவும் காட்டுக.



(a)

$$x \neq 0, 2, \text{ இற்கு } f(x) = \frac{4x+1}{x(x-2)}$$

$$\text{ஆகவே, } f'(x) = \frac{4x(x-2) - (4x+1)(x-2+x)}{x^2(x-2)^2}$$

20

$$= -\frac{2(2x^2 + x - 1)}{x^2(x-2)^2}$$

$$= -\frac{2(2x-1)(x+1)}{x^2(x-2)^2} \text{ for } x \neq 0, 2.$$

5

25

திரும்பல் புள்ளிகள்:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ அல்லது } x = \frac{1}{2}$$

5

	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x < 2$	$2 < x < \infty$
$f'(x)$ இன் குறி	(-)	(+)	(+)	(-)	(-)
$f(x)$	குறையும்	அதிகரிக்கும்	அதிகரிக்கும்	குறையும்	குறையும்

5

5

5

5

5

$\therefore f(x)$ ஆனது $[-1, 0], \left(0, \frac{1}{2}\right]$ இல் அதிகரிக்கும் அத்துடன்

$\left[\frac{1}{2}, 2\right) (-\infty, -1], (2, \infty)$. இல் குறையும்.

30

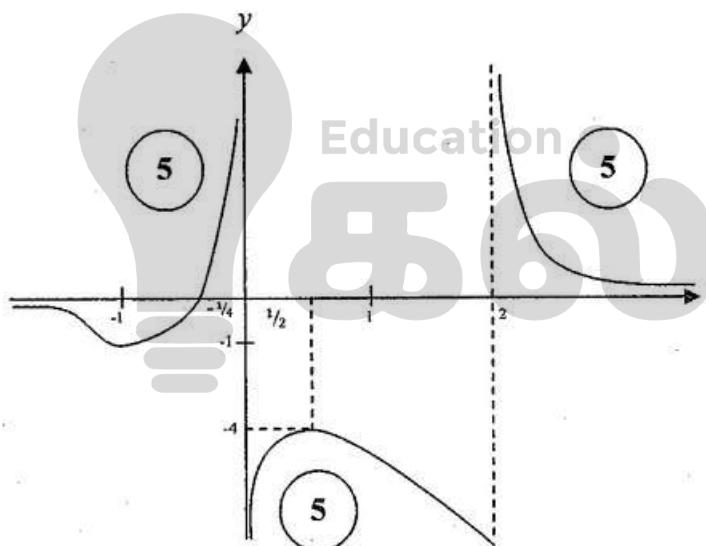
திரும்பல் புள்ளிகள்: $(\frac{1}{2}, -4)$ ஓரிட உயர்வு ஆகும். 5

$(-1, -1)$ ஓரிட இழிவு ஆகும் 5

x- இடைவெட்டு: $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ 5

கிடை அணுகுகோடு: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \therefore y = 0$ 5

நிலைக்குத்து அணுகுகோடு: $x = 0, x = 2$. 5



40

$$f(x) + |f(x)| = \begin{cases} 2f(x) & \text{if } f(x) \geq 0. \\ 0 & \text{if } f(x) < 0. \end{cases}$$

$\therefore f(x) + |f(x)| > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$. 5

$\therefore f(x) + |f(x)| > 0$ ஜ திருப்தி செய்யும் x இன்

45

5

மெய்ப்பெறுமானங்கள் $-\frac{1}{4} < x < 0$ அல்லது $x > 2$.

15

(b)

 $x > 0$; இற்கு

$$36 = xy + \frac{3}{8}\pi x^2 \text{ எனதரப்படுள்ளது :}$$

5

$$\therefore y = \frac{36}{x} - \frac{3}{8}\pi x \text{ for } x > 0$$

5

$$p = 2x + 2y + 2\left(\frac{3}{8}\pi x\right)$$

5

$$= 2x + 2\left(\frac{36}{x} - \frac{3}{8}\pi x\right) + \frac{3}{4}\pi x$$

5

$$= 2x + \frac{72}{x}, x > 0. \text{ இற்கு}$$

$$\frac{dp}{dx} = 2 - \frac{72}{x^2}; x > 0.$$

5

$$\frac{dp}{dx} = 0 \Leftrightarrow x = 6.$$

5

$$0 < x < 6, \text{ இற்கு } \frac{dp}{dx} < 0 \text{ அத்துடன்}$$

$$x > 6, \text{ இற்கு } \frac{dp}{dx} > 0.$$

$\therefore x = 6$. ஆகும்போது p இழிவு ஆகும்

5

40

15. (a) எல்லா $x \in \mathbb{R}$ இற்கும் $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = A(x^2 + 1)^2 + Bx(x^2 + 1) + Cx^2$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக A, B, C ஆகிய மாறிலிகளின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இதிலிருந்து, $\frac{x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1}{x(x^2 + 1)^2}$ ஜப் பகுதிப் பின்னங்களில் எழுதி.

$$\int \frac{x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1}{x(x^2 + 1)^2} dx \text{ ஜக் காண்க.}$$

(b) $I = \int_0^{\frac{1}{4}} \sin^{-1}(\sqrt{x}) dx$ எனக் கொள்வோம். $I = \frac{\pi}{24} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$ எனக் காட்டி, இதிலிருந்து, I இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$$(c) \frac{d}{dx}(x \ln(x^2 + 1) + 2 \tan^{-1} x - 2x) = \ln(x^2 + 1) \text{ எனக் காட்டுக.}$$

இதிலிருந்து, $\int \ln(x^2 + 1) dx$ ஜக் கண்டு, $\int_0^1 \ln(x^2 + 1) dx = \frac{1}{2}(\ln 4 + \pi - 4)$ எனக் காட்டுக.

a ஒரு மாறிலியாகவுள்ளபோது பேறு $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$ ஜப் பயன்படுத்தி

$$\int_0^1 \ln[(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 2)] dx \text{ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.}$$

(a)

$$\begin{aligned} x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 &= A(x^2 + 1)^2 + Bx(x^2 + 1) + Cx^2 \\ &= A(x^4 + 2x^2 + 1) + B(x^3 + x) + Cx^2 \end{aligned}$$

x இன் அடுக்குகளின் குணக்கங்களை ஓப்பிட;

$$x^0 : 1 = A$$

$$x : 3 = B$$

$$x^2 : 4 = 2A+C$$

$$\textcircled{5} + \textcircled{5}$$

$$x^3 : 3 = B$$

$$x^4 : 1 = A$$

$$\therefore A = 1, B = 3, C = 2.$$

$$\textcircled{5}$$

15

$$\frac{x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2 + 1} + \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} \quad (5)$$

$$\int \frac{x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1}{x(x^2 + 1)^2} dx = \int \frac{1}{x} dx + 3 \int \frac{1}{x^2 + 1} dx + 2 \int \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx. \quad (5)$$

$$= \ln|x| + 3 \tan^{-1} x - \frac{1}{x^2 + 1} + E, \text{ where } E \text{ is an arbitrary constant.}$$

(5)

(5)

(5)

(5)

35

(b)

$$I = \int_0^{\frac{1}{4}} \sin^{-1}(\sqrt{x}) dx$$

$$= x \sin^{-1}(\sqrt{x}) \Big|_0^{\frac{1}{4}} - \int_0^{\frac{1}{4}} x \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx. \quad (10)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$$

(10)

$$= \frac{\pi}{24} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$$

20

$$\sqrt{x} = \sin \theta \Rightarrow dx = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta \text{ என்க}$$

(5)

$$x = 0 \text{ ஆகும்போது } \theta = 0$$

$$x = \frac{1}{4} \text{ ஆகும்போது } \theta = \frac{\pi}{6} \quad (5)$$

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} 2 \sin \theta \cos \theta d\theta \quad (5)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos 2\theta) d\theta \quad \text{5}$$

$$= \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} \quad \text{5}$$

$$= \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \text{5}$$

$$\therefore I = \frac{\pi}{24} - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = -\frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{24}.$$

5

35

(c)

$$\frac{d}{dx} (x \ln(x^2 + 1) + 2 \tan^{-1} x - 2x)$$

$$= x \left(\frac{1}{x^2 + 1} \right) (2x) + \ln(x^2 + 1) + \frac{2}{1+x^2} - 2$$

$$= \ln(x^2 + 1) + \underbrace{\frac{2x^2 + 2 - 2(1+x^2)}{1+x^2}}_{=0} \quad \text{5} + \text{5}$$

$$= \ln(x^2 + 1). \quad \text{5}$$

15

$$\int \ln(x^2 + 1) dx = x \ln(x^2 + 1) + 2 \tan^{-1} x - 2x + C, C \text{ இங்கு எதேச்சை மாறிலி} \quad \text{5}$$

$$\therefore \int_0^1 \ln(x^2 + 1) dx = \ln 2 + 2 \left(\frac{\pi}{4} \right) - 2 \quad \text{5}$$

$$= \frac{1}{2} (2 \ln 2 + \pi - 4)$$

$$= \frac{1}{2} (\ln 4 + \pi - 4) \quad \text{5}$$

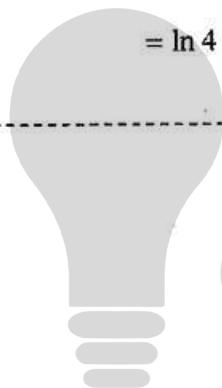
15

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \ln[(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 2)] dx \\ &= \int_0^1 \ln(x^2 + 1) + \int_0^1 \ln(x^2 - 2x + 2) dx \quad \text{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \ln(x^2 - 2x + 2) dx \\ &= \int_0^1 \ln((1-x)^2 - 2(1-x) + 2) dx \\ &= \int_0^1 \ln(x^2 + 1) dx \quad \text{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^1 \ln[(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 2)] dx &= 2 \int_0^1 \ln(x^2 + 1) dx \\ &= \ln 4 + \pi - 4 \quad \text{5} \end{aligned}$$

15



Education

கல்வி

அடியாளம்

16. $P \equiv (x_1, y_1)$ எனவும் l ஆனது $ax + by + c = 0$ இனால் தரப்படும் நேர்கோடு எனவும் கொள்வோம். புள்ளி P இனுடான் l இற்குச் செங்குத்தான் கோடு மீது உள்ள புள்ளி எதனதும் ஆள்கூறுகள் $(x_1 + at, y_1 + bt)$ இனால் தரப்படுகின்றனவெனக் காட்டுக; இங்கு $t \in \mathbb{R}$.

P இலிருந்து l இற்குள்ள செங்குத்துத் தூரம் $\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ என உய்த்தறிக.

l ஆனது நேர்கோடு $x + y - 2 = 0$ எனக் கொள்வோம். $A \equiv (0, 6)$, $B \equiv (3, -3)$ ஆகிய புள்ளிகள் l இன் இருபக்கங்களிலும் இருக்கின்றனவெனக் காட்டுக.

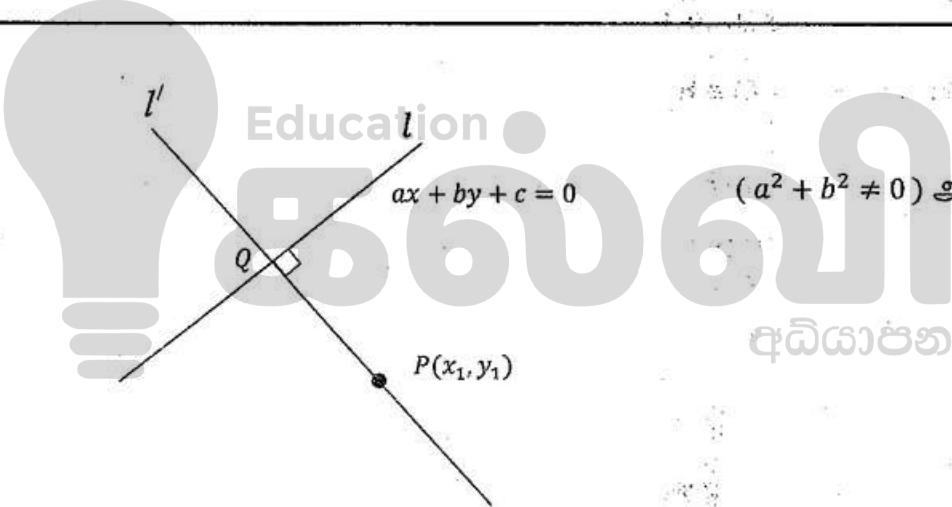
l இற்கும் கோடு AB இற்குமிடையே உள்ள கூர்ந்கோணத்தைக் காண்க.

l ஜத் தொடுவெனவும் முறையே A, B ஆகிய மையங்களைக் கொண்டனவுமான S_1, S_2 என்னும் வட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

l இனதும் கோடு AB இனதும் வெட்டுப் புள்ளி C எனக் கொள்வோம். புள்ளி C இன் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

S_1, S_2 ஆகியவற்றுக்கு C இனுடாக உள்ள மற்றைய பொதுத் தொடலியின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

உற்பத்தியினுடாகச் செல்வதும் S_1 இன் பரிதியை இருக்கிறுவதும் S_2 இற்கு நியிர்கோணமானதுமான வட்டத்தின் சமன்பாடு $3x^2 + 3y^2 - 38x - 22y = 0$ எனக் காட்டுக.



$$l' \text{ இன் சமன்பாடு: } y - y_1 = \frac{b}{a} (x - x_1) \quad (5)$$

$$\therefore \frac{y - y_1}{b} = \frac{x - x_1}{a} = t \quad (\text{எனக}) \quad (5)$$

$$x = x_1 + at, y = y_1 + bt \quad (5)$$

($a = 0$ ம் $b \neq 0$ அல்லது $a \neq 0$ ம் $b = 0$. ஆகும்போது இது வலிதாகும்)

15

l, l' என்பன இடைவெட்டும் புள்ளி $Q \equiv (x_2, y_2) \equiv (x_1 + at_1, y_1 + bt_1)$ என்க

Q ஆனது l , இன் மீது உள்ளதால் $a(x_1 + at_1) + b(y_1 + bt_1) + c = 0$.

$$\therefore t_1 = -\frac{(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}. \quad (5)$$

P இலிருந்து l இற்கான செங்குத்து தூரம் $= PQ$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (5)$$

$$= \sqrt{a^2 t_1^2 + b^2 t_1^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} |t_1|. \quad (5)$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{(a^2 + b^2)}$$

$$= \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (5)$$

20

$$\ell : x + y - 2 = 0$$

$$(0+6-2)(3-3-2) = -8 < 0 \quad (5)$$

$\therefore A, B$ என்பன ℓ இன் எதிரெதிர் பக்கங்களில் இருக்கும் புள்ளிகள்

10

5

AB இன் படித்திறன் $= -3$ 5

ℓ இற்கும் AB இற்கும் இடையிலான கூர்ந்கோணம்

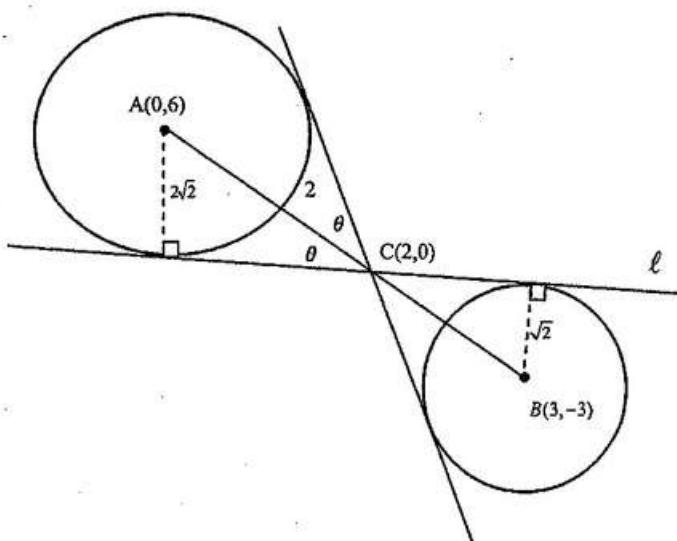
$$\tan \theta = \left| \frac{-1 - (-3)}{1 + (-1)(-3)} \right|$$

5

$$\therefore \theta = \tan^{-1} \left(\frac{1}{2} \right)$$

5

15



5 **5**

$$S_1 \text{ இன் ஆரை} = \frac{|0+6-2|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}, S_2 \text{ இன் ஆரை} = \frac{|3-3-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

5 **5**

$$\therefore S_1 : x^2 + (y-6)^2 = 8 \quad \boxed{5}$$

$$\text{i.e. } x^2 + y^2 - 12y + 28 = 0.$$

$$S_2 : (x-3)^2 + (y+3)^2 = 2 \quad \boxed{5}$$

$$\text{i.e. } x^2 + y^2 - 6x + 6y + 16 = 0$$

30

அவியாபந

$$AC : CB = 2\sqrt{2} : \sqrt{2} = 2 : 1 \quad \boxed{5}$$

$$\therefore C \equiv \left(\frac{6+0}{3}, \frac{-6+6}{3} \right) = (2, 0) \quad \boxed{5}$$

C இனாடாக செல்லும் மற்றைய பொதுதொடலியின் படித்திறன் n என்க

$$\therefore \tan \theta = \frac{1}{2} = \left| \frac{m - (-3)}{1 + m(-3)} \right| \quad \boxed{5}$$

$$\Leftrightarrow 1 - 3m = 2m + 6 \text{ or } 3m - 1 = 2m + 6$$

$$\Leftrightarrow m = -1 \text{ or } m = 7$$

$$\therefore m = 7. \quad \boxed{5}$$

∴ தேவையான சமன்பாடு $y - 0 = 7(x - 2)$. 5

$$\text{i.e. } 7x - y - 14 = 0.$$

25

$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்பது வேண்டிய வட்டத்தின் சமன்பாடு என்க.

S ஆனது உற்பத்திக்கூடாக செல்வதால், $c = 0$. 5

S ஆனது S_1 , இன்பரிதியை இருக்குமிடுவதால் பொதுத்தொடுநாண் A இற்கூடாக செல்லும்.

பொதுதொடுநாணின் சமன்பாடு $S - S_1 \equiv 2gx + (2f + 12)y - 28 = 0$

$A \equiv (0, 6)$ ஆனது $S - S_1 = 0$, இன் மீதுள்ளதால் 5

$$(2f + 12)(6) - 28 = 0.$$

$$(f + 6)(3) - 7 = 0, \text{ இலிருந்து } f = -\frac{11}{3}.$$

S ஆனது S_2 , இற்கு நிமிர்கோணம் ஆகையால் $2g(-3) + 2f(3) = 0 + 16$. 5

$$\therefore -3g + 3\left(-\frac{11}{3}\right) = 8, \Rightarrow g = -\frac{19}{3}.$$

\therefore தேவையான வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 + 2\left(\frac{-19}{3}\right)x + 2\left(\frac{-11}{3}\right)y = 0 \quad \text{5}$$

i.e. $3x^2 + 3y^2 - 38x - 22y = 0.$

35

அடியாளத்தின் மீது விடைகள்

17. (a) $\cos(A+B), \cos(A-B)$ ஆகியவற்றை $\cos A, \cos B, \sin A, \sin B$ ஆகியவற்றில் எழுதுக.

$$\text{இதிலிருந்து, } \cos C + \cos D = 2 \cos\left(\frac{C+D}{2}\right) \cos\left(\frac{C-D}{2}\right) \text{ எனக் காட்டுக.}$$

$$\cos C - \cos D = -2 \sin\left(\frac{C+D}{2}\right) \sin\left(\frac{C-D}{2}\right) \text{ என உய்த்தறிக.}$$

$$\text{சமன்பாடு } \cos 9x + \cos 7x + \cot x (\cos 9x - \cos 7x) = 0 \text{ ஐத் தீர்க்க.}$$

(b) வழக்கமான குறிப்பிட்டில், ஒரு முக்கோணி ABC இற்குக் கோணங்களையெல்லாம் கூறி நிறுவுக.

$$n \in \mathbb{Z} \text{ இற்கு } x \neq n\pi + \frac{\pi}{2} \text{ எனக் கொள்வோம். } \sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

$$\text{ஒரு முக்கோணி } ABC \text{ இல் } AB = 20 \text{ cm}, BC = 10 \text{ cm}, \sin 2B = \frac{24}{25} \text{ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.}$$

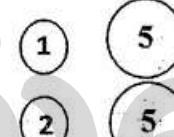
அத்தகைய இரு வேறுவேறான முக்கோணிகள் இருக்கின்றனவெனக் காட்டி, ஒவ்வொன்றிற்கும் AC இன் நீளத்தைக் காண்க.

$$(c) \text{ சமன்பாடு } \sin^{-1} \left[(1 + e^{-2x})^{-\frac{1}{2}} \right] + \tan^{-1}(e^x) = \tan^{-1}(2) \text{ ஐத் தீர்க்க.}$$

(a)

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$



10

(1) + (2)

$$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2 \cos A \cos B$$



10

$$A+B=C \text{ எனவும் } A-B=D, \text{ எனவும் கொள்வதால் } A=\frac{C+D}{2}, B=\frac{C-D}{2}$$

$$\therefore \cos C + \cos D = 2 \cos\left(\frac{C+D}{2}\right) \cos\left(\frac{C-D}{2}\right).$$



10

இப்பொழுது, $\cos C - \cos D = \cos C + \cos(\pi - D)$

5

$$= 2 \cos\left(\frac{C+(\pi-D)}{2}\right) \cos\left(\frac{C-(\pi-D)}{2}\right)$$

$$= 2 \sin\left(\frac{D-C}{2}\right) \sin\left(\frac{C+D}{2}\right)$$



$$= -2 \sin\left(\frac{C-D}{2}\right) \sin\left(\frac{C+D}{2}\right).$$

10

$$\cos 9x + \cos 7x + \cot x (\cos 9x - \cos 7x) = 0 \quad (\sin x \neq 0)$$

$$\therefore 2\cos 8x \cos x + \frac{\cos x}{\sin x} (-2\sin 8x \sin x) = 0 \quad 5$$

$$\therefore \cos x = 0 \text{ அல்லது } (\cos 8x - \sin 8x) = 0 \quad 5$$

$$\therefore \cos x = 0 \text{ அல்லது } \tan 8x = 1.$$

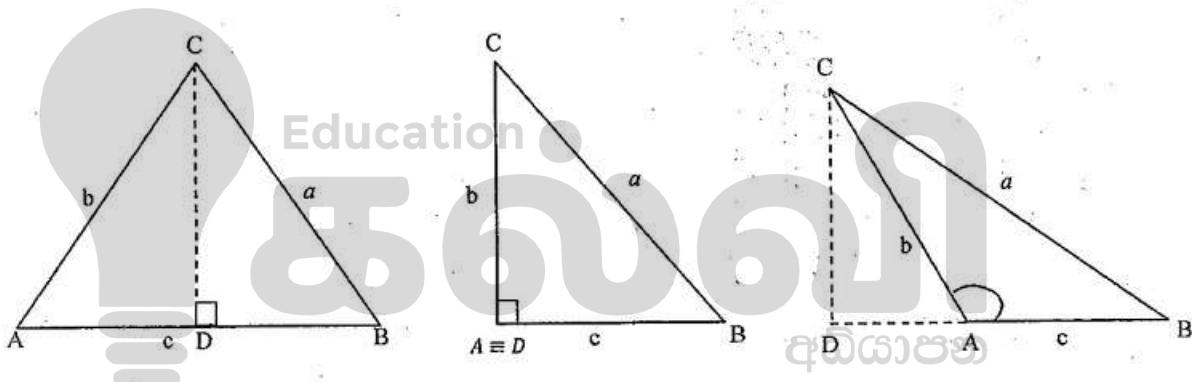
$$m \in \mathbb{Z} \text{ இற்கு } x = 2m\pi \pm \frac{\pi}{2} \text{ அல்லது } n \in \mathbb{Z} \text{ இற்கு } 8x = n\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$m \in \mathbb{Z} \text{ இற்கு } x = 2m\pi \pm \frac{\pi}{2} \text{ அல்லது } n \in \mathbb{Z} \text{ இற்கு } x = \frac{n\pi}{8} + \frac{\pi}{32} \quad 5 + 5 \quad 20$$

(b)

கோசென் நெறி: யாதாயினுமொரு முக்கோணி ABC இற்கு

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \text{ ஆகும்}$$



நிறுவல் : C இலிருந்து AB மீதான செங்குத்தின் அடி D என்க . பைதகரஸ் தேற்றத்தின் படி $BC^2 = BD^2 + DC^2$ _____ 1

வகை (i) A கூர்ந்கோணம் எனின்; வகை (ii) A விரிகோணம் எனின்

$$DC = b \sin A$$

$$DC = b \sin(\pi - A) = b \sin A$$

$$DB = c - b \cos A \quad 5$$

$$DB = c + b \cos(\pi - A) = c - b \cos A \quad 5$$

$$\therefore \text{இரு வகைகளிலும், } 1 \Rightarrow a^2 = b^2 \sin^2 A + (c - b \cos A)^2$$

$$= b^2 \sin^2 A + c^2 - 2bc \cos A + b^2 \cos^2 A$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad (\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1) \quad 5$$

$$A = \frac{\pi}{2}, \text{ ஆகும்போது } \cos A = 0 \text{ மற்றைய வகைகளிலும் இது நிகழும்.}$$

30

$$x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}, \text{ என்க } (\cos x \neq 0)$$

$$\sin 2x = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x} \times \cos^2 x$$

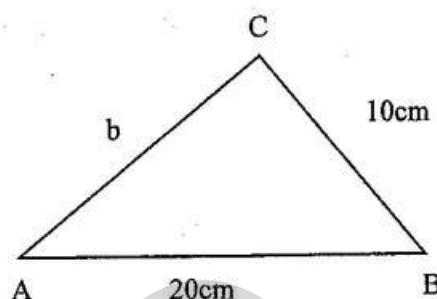
5

$$= \frac{2 \tan x}{\sec^2 x}$$

$$= \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

5

10



$$\sin 2B = \frac{24}{25} \Rightarrow B \text{ கூர்வுகோணம்}$$

$$\therefore \frac{2t}{1+t^2} = \frac{24}{25}, \text{ இங்கு } t = \tan B$$

5

$$12t^2 - 25t + 12 = 0$$

$$(4t-3)(3t-4) = 0$$

$$t = \frac{3}{4} \text{ or } \frac{4}{3}$$

5

5

$\therefore B$ இற்கு இரு வேறு வேறான தீர்வுகள் உண்டு

\therefore இரு வேறு வேறான முக்கோணிகள் உண்டு

$$B \text{ கூர்வுகோணம் } \cos B = \frac{3}{5} \text{ or } \cos B = \frac{4}{5}$$

$$\text{When } \cos B = \frac{3}{5}; \quad AC^2 = (20)^2 + 10^2 - 2(20)(10)\left(\frac{3}{5}\right) \Rightarrow AC = 2\sqrt{65}.$$

5

$$\cos B = \frac{4}{5}; \text{ ஆகையில் } AC^2 = (20)^2 + (10)^2 - 2(20)(10)\left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow AC = 6\sqrt{5}.$$

5

25

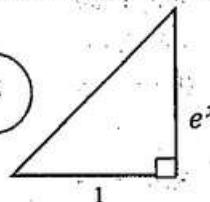
(c)

$$\alpha = \sin^{-1}(1+e^{-2x})^{\frac{1}{2}}. \text{ என்க } (1+e^{-2x})^{\frac{1}{2}} > 0, \text{ ஆகையால் } \alpha \text{ கூர்வுகோணம்.}$$

$$\text{எனவே } \sin \alpha = (1+e^{-2x})^{\frac{1}{2}} = \frac{e^x}{\sqrt{1+(e^x)^2}}$$

5

$$\therefore \tan \alpha = e^x.$$



தரப்பட்ட சமன்பாட்டிலிருந்து $\alpha + \alpha = \lambda$.

$$\therefore \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \tan \lambda \quad (5)$$

$$\Rightarrow \frac{2e^x}{1 - e^{2x}} = 2 \quad (5)$$

$$\Rightarrow e^x = 1 - e^{2x}$$

$$\Rightarrow e^{2x} + e^x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow e^x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (5)$$

$e^x > 0$, ஆகையால் (-) குறி எடுக்கப்பட முடியாது.

$$\therefore e^x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad (5)$$

$$\therefore x = \ln\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right). \quad (5)$$

x இன் இப்பெறுமானமானது தரப்பட்ட சமன்பாட்டை திருப்தி செய்கின்றது.

35

கல்வி

அடியாளம்



க.பொ.த. (உயர்தர)ப் பரிசீலனை - 2021 (2022)

10 - கிளைந்த கணிதம்

புள்ளி வழங்கும் திட்டம்

பத்திரம் II

பகுதி A

$$= 10 \times 25$$

$$= 250$$

பகுதி B

$$= 05 \times 150$$

$$= 750$$

மொத்தம்

$$= \frac{1000}{10}$$

இறுதி புள்ளி

$$= 100$$

விடைத்தாள்களுக்குப் புள்ளியிடல் - பொது நட்பு முறைகள்

விடைத்தாள்களுக்குப் புள்ளியிடும் போதும், புள்ளிப்படியிலில் புள்ளிகளைப் பதியும் போதும் ஒர் அங்கீரிக்கப்பட்ட முறையைக் கடைப்பிடித்தல் கட்டாயமானதாகும். அதன்பொருட்டு பின்வரும் முறையில் செயற்படவும்.

1. விடைத்தாள்களுக்குப் புள்ளியிடுவதற்கு சிலப்பு நிற குழிழ்முனை பேளாவை பயன்படுத்தவும்.
2. சுகல விடைத்தாள்களினதும் முதற்பக்கத்தில் உதவிப் பரிசுகரின் குறியிட்டெண்ணைக் குறிப்பிடவும். இலக்கங்கள் எழுதும்போது தெளிவான ஒலைக்கத்தில் எழுதவும்.
3. இலக்கங்களை எழுதும்போது பிழைகள் ஏற்பட்டால் அவற்றைத் தளிக்கோட்டனால் கீழிட்டு, மீண்டும் பக்கத்தில் சரியாக எழுதி சிற்றாப்பத்தை இடுவும்.
4. ஒவ்வொரு வினாவினதும் உடற்குதிகளின் விடைகளுக்காக பெற்றுக்கொண்ட புள்ளியை பதியும் போது அந்த வினாப்பகுதிகளின் இறுதியில் Δ இன் உள் பதியவும். இறுதிப் புள்ளியை வினா ஒலைக்கத்துடன் இன் உள் பின்னமாகப் பதியவும். புள்ளிகளைப் புதிவதற்கு பரிசுகர்களுக்காக ஒதுக்கப்பட்ட நிரலை உபயோகிக்கவும்.

உதாரணம் - வினா இல 03

(i)

.....

.....

(ii)

.....

.....

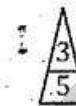
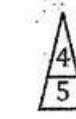
(iii)

.....

.....

03

$$(i) \frac{4}{5} + (ii) \frac{3}{5} + (iii) \frac{3}{5} =$$



$$\frac{10}{15}$$

பல்தேர்வு விடைத்தாள் (தூணாத்தாள்)

1. க.பா.த.ல். தரி மற்றும் தகவல் தொழிலுடைய பரிசீசக்கான தூணாத்தாள் தினணக்களாத்தால் வழங்கப்படும். சரியாக தூண்டியிட்டு அத்தாட்சிப்படுத்திய தூணாத்தாள் தங்களுக்கு கிடைக்கப்படும். அத்தாட்சிப்படுத்திய தூணாத்தாளைப் பயன்படுத்துவது பரிசுகரின் கடமையாகும்.
2. அதன் பின்னர் விடைத்தாளைநன்கு பரிசீலித்துப் பார்க்கவும். ஏதாவது வினாவுக்கு, ஒரு விடைக்கும் அதிகமாக குறியிட்டிருந்தாலோ. ஒரு விடைக்காவது குறியிடப்படாமல்விருந்தாலோ தெரிவுகளை வெட்டிவிட்க்கூடியதாக கோடொன்றைக் கீறவும், சில வேளைகளில் பரிசோத்தி முன்னர் குறிப்பிட்ட வினாயை அடித்துவிட்டு வேறு விடைக்குக் குறியிட்டிருக்க முடியும். அவ்வாறு அழித்தாள் போது நன்கு அழிக்காது விட்டிருந்தால், அவ்வாறு அழிக்கப்பட்ட தெளிவின் மீதும் கோட்டுவும்.
3. தூணாத்தாளை விடைத்தாளின் மீது சரியாக வைக்கவும். சரியான விடையை அடையாளத்தாலும் பிழையான விடையை O அடையாளத்தாலும் இறுதி நிரலில் அடையாளமிடவும். சரியான விடைகளின் எண்ணிக்கையை அவ்வள் தெரிவுகளின் இறுதி நிரையின் கீழ் அந்துடன் அவற்றை கூட்டி சரியான புள்ளியை உரிய கட்டத்தில் எழுதவும்.

கட்டமைப்பு கட்டுரை விடைத்தாள்கள்

1. பரிசார்த்திகளால் விவைத்தாளில் வெறுமையாக விடப்பட்டுள்ள இபங்களையும், பக்கங்களையும் குழுக்குக் கோட்டு வெட்டிவிடவும். பின்முயன் பொருத்தமற்ற விடைகளுக்குக் கீழ் கோட்டுவும், புள்ளி வழங்கக்கூடிய இபங்களில் அடையாளமிட்டு அதனைக் காட்டவும்.
2. புள்ளிகளை ஒவ்வொட்டு கடதாரியின் இது பக்கத்தில் குறிக்கவும்.
3. சுகல வினாக்களுக்கும் கொடுத்த முழுப் புள்ளியை விவைத்தாளின் முன் பக்கத்திலுள்ள பொருத்தமான பட்டியிலுள்ள வினா இலக்கத்திற்கு நேராக 2 இலக்கங்களில் பதியவும். வினாத்தாளில் உள்ள அபிவருத்தனின் படி வினாக்கள் தெரிவ எசுப்பப்பட்ட வேண்டும். எல்லா வினாக்களினதும் புள்ளிகளும் முதல் பக்கத்தில் பதியப்பட்ட பின் விவைத்தாளில் மேலதிகமாக எழுதப்பட்டிருக்கும் விடைகளின் புள்ளிகளில் குறைவான புள்ளிகளை வெட்டி விடவும்.
4. மொத்த புள்ளிகளை கவனமாக கூட்டி முன் பக்கத்தில் உரிய கவட்டும் பதியவும். விவைத்தாளில் வழங்கப்பட்டுள்ள விடைகளுக்கான புள்ளியை மீண்டும் பரிசீலித்த பின் முன்னால் பதியவும். ஒவ்வாரு வினாக்களுக்கும் வழங்கப்படும் புள்ளிகளை உரிய விதித்தில் எழுதவும்.

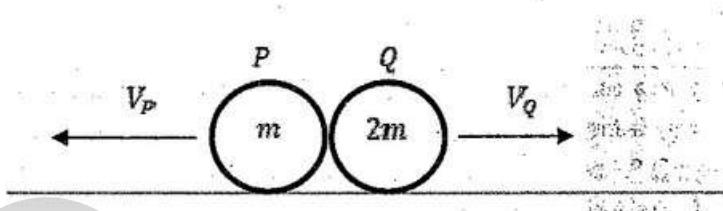
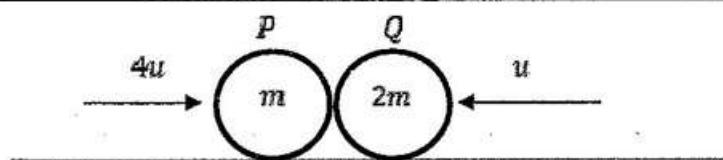
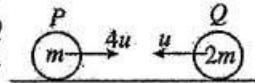
புள்ளிப்பட்டியல் தயாரித்தல்

திம்முறை சுகல பாபங்களுக்குமான இறுதிப்புள்ளி குழுவிலுள்ள கணிப்பிடப்படாது. இது தவிர ஒவ்வாரு வினாப் பத்திரிக்குமான இறுதிப்புள்ளி தலைத்துவியாக புள்ளிப்பட்டியலில் பதியப்பட வேண்டும். பத்திரிகை ந்தான் பல்தேர்வு வினாப்பத்திரிக் மட்டும் இருப்பின் புள்ளிகள் இலக்கத்திலும் எழுத்திலும் பதியப்பட வேண்டும்.



Part A

1. தினிவு \underline{u} ஜூட்டையே ஒரு துணிக்கை P உம் தினிவு $2m$ ஜூட்டையே ஒரு துணிக்கை Q உம் ஓர் உப்பமான கிடை மேசை மீது ஒரே நேர்கோட்டின் வழியே ஒன்றையொன்று நோக்கி முறையே $4u$, u என்னும் கதிகளுடன் இயங்கி நேரடியாக மோதுகின்றன. P இற்கும் Q இற்குமிடையே உள்ள மீளமைவுக் குணகம் $\frac{4}{5}$ ஆகும். மோதுகைக்குப் பின்னர் P உம் Q உம் ஒன்றிலிருந்தொன்று எதிர்த் திசைகளில் இயங்குகின்றனவெனக் காட்டுக.
- மோதுகைக்குப் பின்னர் P உம் Q உம் ஒன்றுக்கொன்று இடைத்தூரம் a இல் இருப்பதற்கு எடுக்கும் நேரத்தைக் காணக்.



தொகுதிக்கு $I = \Delta(m\underline{v})$:

$$\begin{aligned} 0 &= (2mV_Q - mV_p) - (4mu - 2mu) \\ \Rightarrow 2V_Q - V_p &= 2u \end{aligned}$$

5

 $I = \Delta(m\underline{v})$ for P and Q

நியூட்டனின் பரிசோதனை விதிப்படி

$$V_Q + V_p = \frac{4}{5}(4u + u)$$

5

2

$$V_Q + V_p = 4u$$

$$: V_Q = 2u, V_p = 2u.$$

5

Newton's Experimental Law

$$(1) + (2), V_Q > 0, V_p > 0.$$

5

For both V_p and V_Q

\therefore மொத்தலின்பின் P, Q ஒன்றையொன்று விலகிச்செல்லும்.

$$\underline{V}(P, Q) = \underline{V}(P, E) + \underline{V}(E, Q)$$

For both $V_p > 0$ and
 $V_Q > 0$ or equivalent

$$= \overline{2u} + \overline{2u}$$

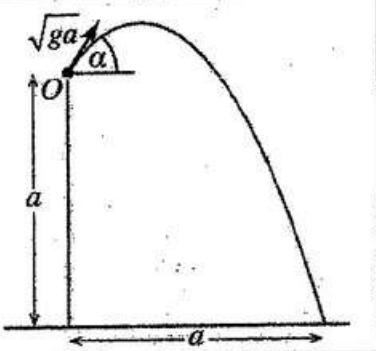
$$= 4u \leftarrow$$

தேவையான நேரம் $= \frac{a}{4u}$.

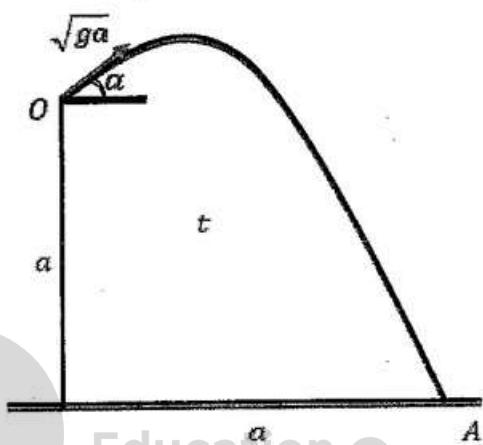
5

$\frac{a}{4u}$ seen.

2. உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு ஒரு கிடைத் தரைக்கு மேலே நிலைக்குத்துத் தூரம் a இல் உள்ள ஒரு புள்ளி O இலிருந்து ஒரு துணிக்கை கிடையுடன் கோணம் α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) இல் தொடக்க வேகம் \sqrt{ga} உடன் ஏறியப்படுகின்றது. துணிக்கை புள்ளி O இலிருந்து கிடைத் தூரம் a இல் தரையில் அடிக்கின்றது. $\tan \alpha = 1 + \sqrt{2}$ எனக் காட்டுக.



25



$$\text{O இலிருந்து } A \text{ இற்கு } s = ut + \frac{1}{2}at^2:$$

$$\rightarrow a = \sqrt{g} \cos \alpha t$$

(1)

5

$$\rightarrow s = u + \frac{1}{2}at^2$$

$$\uparrow -a = \sqrt{g} \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2$$

(2)

5

$$\uparrow s = u + \frac{1}{2}at^2$$

$$\textcircled{1} \quad \text{இலிருந்து } t = \frac{a}{\sqrt{g} \cos \alpha}.$$

$$\textcircled{2} \quad \text{இலிருந்து } -a = a \tan \alpha - \frac{1}{2}g \frac{a^2}{ga \cos^2(\alpha)}.$$

$$\therefore -2 = 2 \tan \alpha - (1 + \tan^2 \alpha).$$

5

For the quadratic in $\tan \alpha$

$$\therefore \tan^2 \alpha - 2 \tan \alpha - 1 = 0.$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

5

both ±

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ஆகையால் (-) சாத்தியமில்லை.

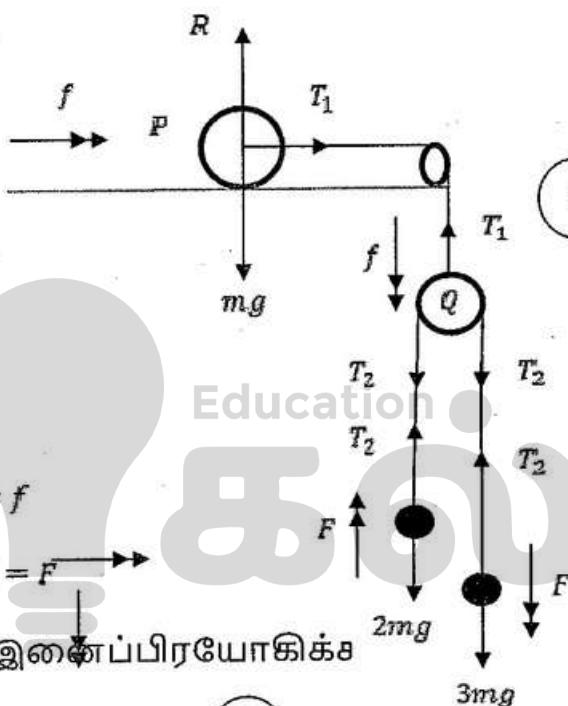
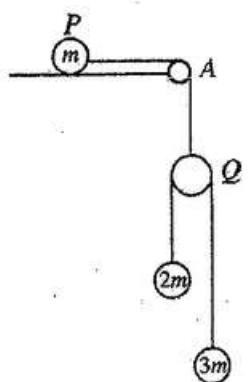
$$\therefore \tan \alpha = 1 + \sqrt{2}.$$

5

Selecting the correct sign



3. தினிவு 3 ஜூலையே ஒரு துணிக்கை P ஓர் உட்டையை கிடை மேசை மீது வைக்கப்பட்டு, மேசையின் ஒரத்தின் புள்ளி A இல் நிலைப்படுத்தப்பட்ட ஒரு நிலைத்த சிறிய உட்டையை கூறப்பட்டு மேலாகச் செல்லும் ஒர் இலோசான நீட்டமுடியாத இழையினால் ஒர் இலோசான உட்டையை கூறப்பட்டு இருக்கப்பட்டுள்ளது. உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு கப்பி Q இற்கு மேலாகச் செல்லும் ஒர் இலோசான நீட்டமுடியாத இழையினால் $2m$, $3m$ என்னும் தினிவுகளை உட்டைய துணிக்கைகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. துணிக்கைகளும் இழைகளும் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் இருக்கின்றன. இழைகள் இறுக்கமாக இருக்கத் தொகுதி ஒய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. Q இன் ஆரம்புகேலைத் துணிவதற்குப் போதிய சமன்பாடுகளைப் பெறுக.



$$\underline{a}(P, E) = f$$

$$\underline{a}(3m, Q) = F$$

$$F = ma \text{ இதைப்பிரயோகிக்க}$$

$$(P) \rightarrow T_1 = mf \quad (5)$$

$$(Q) \downarrow 2T_2 - T_1 = 0 \quad (5)$$

$$(2m) \uparrow T_2 - 2mg = 2m(F - f) \quad (5)$$

$$(3m) \downarrow 3mg - T_2 = 3m(F + f) \quad (5)$$

$$F = ma \text{ for } P$$

$$F = ma \text{ for } Q$$

$$F = ma \text{ for } 2m$$

$$F = ma \text{ for } 3m$$

அல்லது

$$(Q) \quad (2m) \text{ and } (3m) \quad | \quad T_1 - 2mg - 3mg = 2mg(F - f) + 3m(f + F)$$

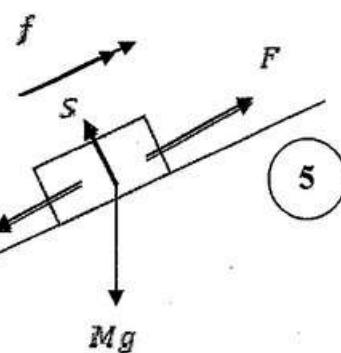
$$F = ma \text{ for } Q, 2m \text{ and } 3m$$

எதாவது நான்கு சுயாதீனமான சமன்பாடுகள்

20

25

4. M kg திணிவள்ள ஒரு கார் கிடையுடன் சாய்வு $\sin^{-1}\left(\frac{1}{20}\right)$ ஜக் கொண்ட ஒரு நேர் வீதி வழியே ஒரு மாறா ஆர்மூடுகேவுடன் மேல்நோக்கி இயங்குகின்றது. அதன் இயக்கத்திற்கு ஒரு மாறாத் தட்ட R N உள்ளது. அது தன் கதியை 36 km h^{-1} இலிருந்து 72 km h^{-1} இறகு அதிகரிக்கச் செய்வதற்குக் கார் சென்ற தூரம் 500 m ஆகும். அதன் கதி 54 km h^{-1} ஆக இருக்கும்போது கார் உஞ்சிய வலுவைத் தணிவதற்குப் போதிய சமன்பாடுகளைப் பெறுக.



For forces with or without S

$$\sin \alpha = \frac{1}{20}$$

$$\frac{36 \times 1000}{3600} = 10 \text{ ms}^{-1}$$

$$\frac{72 \times 1000}{3600} = 20 \text{ ms}^{-1}$$

$$\frac{54 \times 1000}{3600} = 15 \text{ ms}^{-1}$$

$$v^2 = u^2 + 2as:$$

$$20^2 = 10^2 + 2f(500) \quad 5$$

$$f = \frac{150}{500} = \frac{3}{10} \text{ ms}^{-2}$$

For all three conversions of speeds

Applying $v^2 = u^2 + 2as$

$$F = ma:$$

5

Applying $F = ma$

$$F - R - Mg \sin \alpha = Mf$$

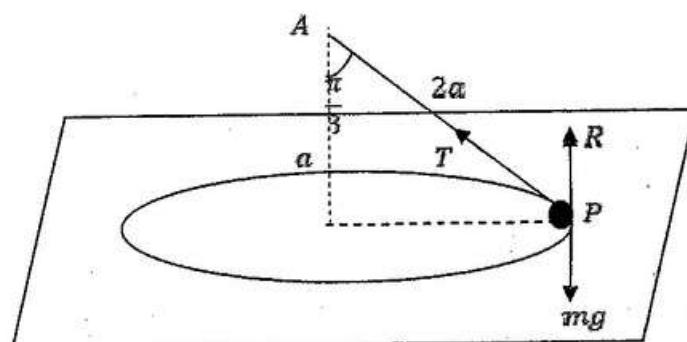
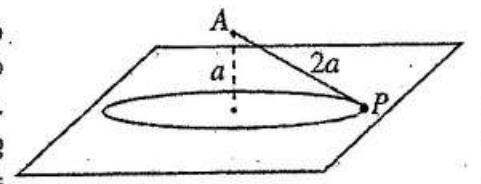
$$P = F \cdot V$$

$$= F \cdot 15$$

$$P = F \cdot 15 \text{ seen}$$

25

5. நீளம் $2a$ ஜி உடைய ஓர் இலோசன நீட்டமுடியாத இழையின் ஒரு நுனி ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசைக்கு நிலைக்குத்தாக மேலே தூரம் a இல் உள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளி A உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இழையின் மற்றைய நுனியுடன் இணைக்கப்பட்ட திணிவு m ஜி உடைய ஒரு துணிக்கை P ஆனது இழை இறுக்கமாக இருக்க மேசை மீது ஒரு கிடை வட்டத்தில் சீரான கதி $\sqrt{\frac{ga}{2}}$ உடன் இயங்குகின்றது (உருவைப் பார்க்க). மேசையின் மூலம் துணிக்கை P மீது பிரயோகிக்கப்படும் செவ்வன் மறுதாக்கத்தின் பருமன் $\frac{5}{6}mg$ எனக் காட்டுக.



5

For the forces

 $F = ma$: இனை பிரயோகிக்க

$$\leftarrow T \sin \frac{\pi}{3} = m \cdot \frac{ga}{2(2a \sin \frac{\pi}{3})}$$

5

$F = ma \leftarrow$

$$\therefore T = \frac{mg}{3}$$

5

$T = \frac{mg}{3}$ seen or implied

$$\uparrow R - mg + T \cos \frac{\pi}{3} = 0$$

5

$F = ma \uparrow$

$$\therefore R = mg - \frac{mg}{6}$$

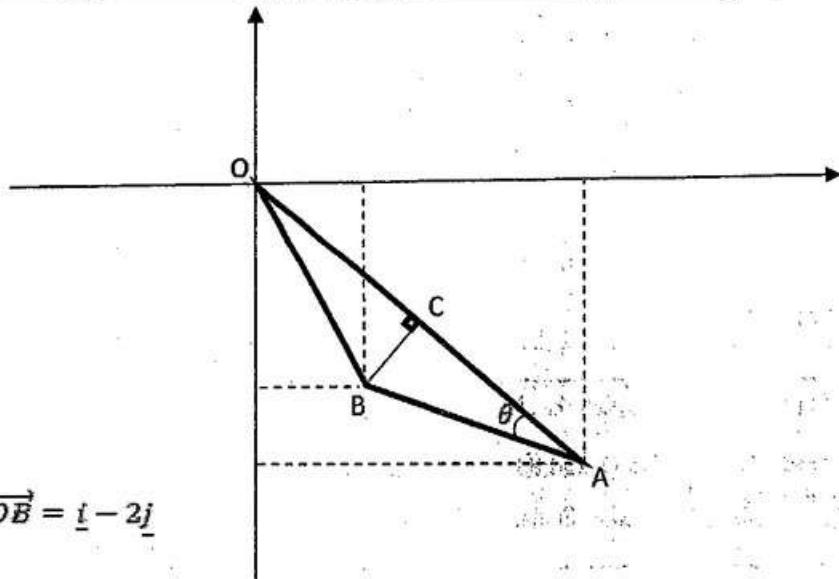
$$= \frac{5}{6}mg$$

5

Work leading to the answer

25

6. வழக்கமான குறிப்பிட்டில், ஒரு நிலைத்த உற்பத்தி O பற்றி A, B என்னும் இரு புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ ஆகும். $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB}$ ஐப் பயன்படுத்தி $\hat{\angle}OAB$ ஜக் காண்க. C ஆனது OA மீது $\hat{\angle}OCB = \frac{\pi}{2}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக உள்ள புள்ளி எனக் கொள்க. \overrightarrow{OC} ஜக் காண்க.



$$\overrightarrow{OA} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}, \quad \overrightarrow{OB} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$$

$$\therefore \overrightarrow{AO} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j},$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) - (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) \quad 5 \\ &= -\mathbf{i} + \mathbf{j} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AO}| |\overrightarrow{AB}| \cos \theta \quad 5$$

$$2 + 3 = \sqrt{13}\sqrt{2} \cos \theta$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{5}{\sqrt{26}} \quad 5$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{26}}\right)$$

$$\overrightarrow{OC} = \lambda \overrightarrow{OA}, \text{ இங்கு } \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{CB} = (\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) - \lambda(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j})$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \text{ இலிருந்து } 2(1 - 2\lambda) - 3(-2 + 3\lambda) = 0$$

$$\therefore \lambda = \frac{8}{13} \quad 5$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{8}{13} (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j})$$

\overrightarrow{AB} is terms of \mathbf{i} and \mathbf{j}

Definition of $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB}$ or equivalent

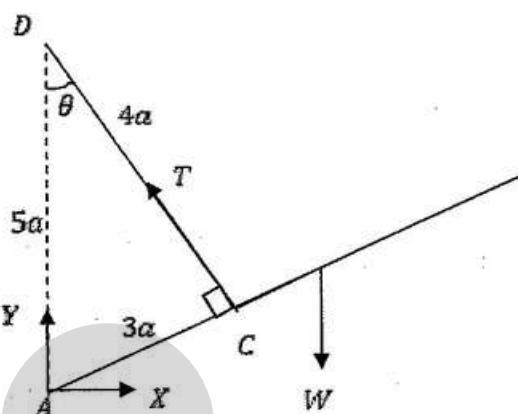
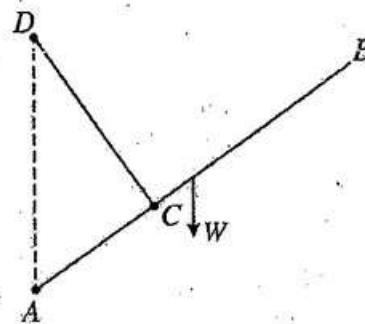
$\cos \theta = \frac{5}{\sqrt{26}}$ seen

condition for $\hat{\angle}OCB = \frac{\pi}{2}$
using dot product

value of λ or equivalent

25

7. நீளம் $8a$ ஜூயும் நிறை W ஜூயும் உடைய ஒரு சீரான கோல் AB இன் முனை A ஒரு நிலைத்த புள்ளியிடத்தில் உபயாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. நீளம் $4a$ ஜூ உடைய ஓர் இலோசான நீட்டமுடியாத இழையின் ஒரு நுனி கோல் மீது $AC = 3a$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக உள்ள புள்ளி C உடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை மற்றைய நுனி A இறகு நிலைக்குத்தகாக மேலே $AD = 5a$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக உள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளி D உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. கோல் நாப்பத்தில் இருக்கின்றது. இழையின் இழுவை $\frac{16}{15}W$ எனக் காட்டுக. A இல் உள்ள மறுதாக்கத்தின் கிடைக் கூறையும் காணக்.



5

For the forces

$$\hat{A}CD = \frac{\pi}{2}$$

5

கோலின் சமநிலைக்கு:

A

$$W \times 4a \cos \theta - T \times 3a = 0$$

5

An equation sufficient to find T .

$$\therefore T = \frac{4W}{3} \cos \theta$$

5

$$= \frac{4W}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{16W}{15}$$

work leading to the answer

$$\rightarrow X = T \sin \theta$$

$$= \frac{16W}{15} \times \frac{3}{5}$$

$$= \frac{16W}{25}$$

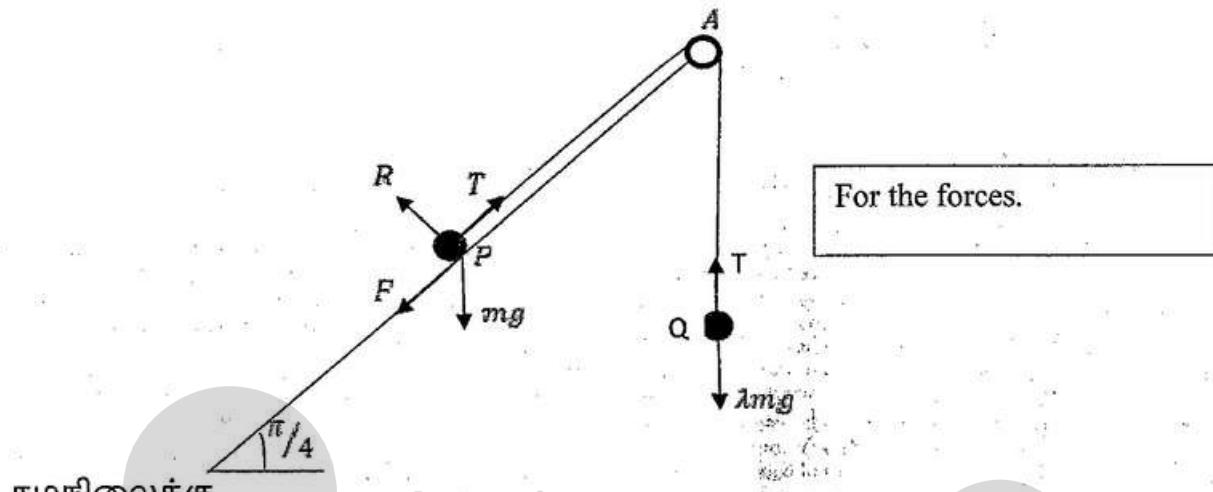
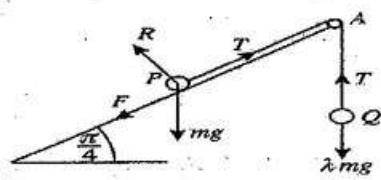
5

 $\frac{16W}{25}$ seen.

25

8. கிடையுடன் கோணம் $\frac{\pi}{4}$ இங் சாய்ந்த ஒரு கரடான் தளத்தின் மீது திணிவு λ லை உடைய ஒரு துணிக்கை P கூடுகிறது. உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு சாய்தளத்தின் ஒரத்திலே A இல் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ள ஒரு நிலைத்த ஒப்பொன சிறிய கப்பிக்கு மேலாகச் செல்லும் ஒரு இலோசனை நீட்டமுடியாத இழையின் ஒரு நிலை துணிக்கை P உடனும் மற்றைய நிலை திணிவு λmg லை உடைய ஒரு துணிக்கை Q உடனும் இனைக்கப்பட்டுள்ளன. துணிக்கை P இங்கும் சாய்தளத்திற்குமிடையே உள்ள உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{2}$ அதும் கோடு PA மூன்று சாய்தளத்தின் ஒரு அதியுயர் அரிவைக்கோடாக இருக்கும் அதே வேளை இழை இறுக்கமாக இருக்க பூர்வமாக துணிக்கை P , Q ஆகிய இரு துணிக்கைகளும் நாப்பத்தில் இருக்கின்றன.

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \leq \lambda \leq \frac{3}{2\sqrt{2}}$$



சமநிலைக்கு

$$R - mg \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

5

$$\therefore R = \frac{mg}{\sqrt{2}}$$

$$(Q) \uparrow \quad T - \lambda mg = 0$$

5

$$\therefore T = \lambda mg$$

An equation leading to the value of R

An equation leading to the value of T .

$$(P) \nearrow \quad T - F - mg \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

5

$$\therefore F = \lambda mg - \frac{mg}{\sqrt{2}} = \frac{mg}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}\lambda - 1)$$

An equation leading to the value of F .

P இன் சமநிலைக்கு

$$\frac{1}{2} \geq \frac{|F|}{R}$$

5

$$\therefore |\sqrt{2}\lambda - 1| \leq \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{2\sqrt{2}} \leq \lambda \leq \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

5

work leading to the answer

25

9. A, B ஆகியன ஒரு மாதிரி வெளி யீடுகள் இரு சாரா நிகழ்வுகளைக் கொள்வோம். வழக்கமான குறிப்பிட்டில், $P(A) = \frac{1}{5}$ எனவும் $P(B) = \frac{3}{4}$ எனவும் தரப்பட்டுள்ளது. $P(A \cup B)$, $P(A|A \cup B)$, $P(B|A')$ ஆகியவற்றைக் காண்க; இங்கு A' அன்று A இன் நிரப்பு நிகழ்வைக் குறிக்கின்றது.

$$P(A) = \frac{1}{5}, P(B) = \frac{3}{4}$$

A, B என்பன சாரதாவை ஆகையால்,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

5

$$= \frac{3}{20}$$

5

For the condition for independence

Formula a for $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{3}{4} - \frac{3}{20} = \frac{4}{5}$$

5

$\frac{1}{4}$ or equivalent seen.

$$P(A|A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{1/5}{4/5} = \frac{1}{4}$$

$$P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')}$$

5

$\frac{3}{5}$ or equivalent seen.

$$P(B \cap A') = P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4} - \frac{3}{20} = \frac{3}{5}$$

அல்லது

$$(P(B \cap A') = P(B) \cdot P(A') = \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{3}{5})$$

$$P(B|A') = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}$$

5

$\frac{3}{4}$ or equivalent seen.

25

10. நேர் நிறைவெண்களின் ஐந்து நோக்கல்களின் ஒரு தொடையின் இடை 6 ம் வீச்சு 10 ம் ஆகும். அதற்கு இரு ஆகாரங்கள் உள்ளன. இடையம் ஆகாரங்களிலிருந்து வேறுபடுமெனின், ஐந்து நோக்கல்களையும் காணக.

a, a, b, c, c அதிகரிக்கும் ஒழுங்கிலுள்ள இலக்கங்கள் எனக்

வீச்சு 10, ஆகையால் $c - a = 10$.

5

Condition for the range

$$\therefore c = a + 10 \quad \text{--- (1)}$$

$$\text{இடை } 6, \text{ ஆகையால் } \frac{2a+b+2c}{5} = 6. \quad \text{--- (2)}$$

5

For this or an equation

$$(1), (2) \text{ இலிருந்து } 4a + b + 20 = 30$$

$$\text{i.e. } 4a + b = 10 \quad \text{--- (3)}$$

5

An equation sufficient to determine the observations

a, b என்பன நேர் நிறை எண்கள் ஆகையால்,

அடியாபன

(3) இலிருந்து $4a \leq 9$ கு சாத்தியமான பெறுமானங்கள் 1,2 மட்டும்

$$a = 1, \text{ எனின் } b = 6.$$

Mean \neq mode used.

$a = 2, \text{ எனின் } b = 2$, இடையமும் ஆகாரமும் வேறு வேறு ஆனவை என்பதால்

இது பொருந்தாது

5

\therefore எனவே இலக்கங்கள் ஆவன

1, 1, 6, 11, 11 seen.

$$1, 1, 6, 11, 11.$$

5

25

11.(a) ஒரு புள்ளி O இலிருந்து நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி வேகம் $u \text{ m s}^{-1}$ உடன் ஏறியப்படும் ஒரு துணிக்கை P ஆனது 4 செக்கன்களுக்குப் பின்னர் ஒரு புள்ளி A ஜ அடையும் அதே வேளை மேலும் 2 செக்கன்களுக்குப் பின்னர் மறுபடியும் A இற்கு வருகின்றது. துணிக்கை P இரண்டாம் தடவை A இல் இருக்கும் கணத்தில் வேறொரு துணிக்கை Q ஆனது O இலிருந்து நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி அதே வேகம் $u \text{ m s}^{-1}$ உடன் ஏறியப்படுகின்றது. P, Q ஆகியவற்றின் இயக்கங்களுக்கான வேக-நேர வரைபை ஒரே வரிப்படத்தில் பரும்படியாக வரைக.

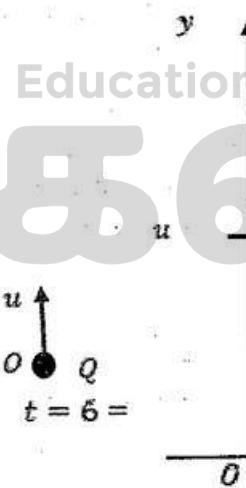
இதிலிருந்து, g இல் u இன் பெறுமானத்தையும் OA இன் உயரத்தையும் P உடன் மோதுவதற்கு Q எடுக்கும் நேரத்தையும் காண்க.

(b) ஒரு கப்பல் S நிலம் தொடர்பாகச் சீரான கதி $u \text{ km h}^{-1}$ உடன் வடக்கு நோக்கிச் செல்கின்றது. ஒரு குறித்த கணத்தில் S இலிருந்து கிழக்கே $d \text{ km}$ தூரத்தில் ஒரு படகு P உம் S இலிருந்து தெற்கே $\sqrt{3} d \text{ km}$ தூரத்தில் வேறொரு படகு Q உம் இருக்கின்றன. படகு P நிலம் தொடர்பாகச் சீரான கதி $2u \text{ km h}^{-1}$ உடன் ஒரு நேர்கோட்டுப் பாதையில் S ஜ இடைமறிப்பதற்குச் செல்லும் அதே வேளை படகு Q நிலம் தொடர்பாகச் சீரான கதி $3u \text{ km h}^{-1}$ உடன் ஒரு நேர்கோட்டுப் பாதையில் P ஜ இடைமறிப்பதற்குச் செல்கின்றது.

(i) படகு P ஆனது கப்பல் S ஜ இடைமறிப்பதற்கு எடுக்கும் நேரம் $\frac{d}{\sqrt{3}u} \text{ h}$ எனவும்

(ii) படகு Q ஆனது படகு P ஜ இடைமறிப்பதற்கு முன்பாகப் படகு P கப்பல் S ஜ இடைமறிக்கும் எனவும் காட்டுக.

(a)



Area $\Delta STU = \text{Area } \Delta UZW$ ஆகையால்,

$$TU = TZ.$$

$$TZ = Z \Rightarrow TU = 1.$$

5

$$\therefore OU = 5.$$

5

$$\Delta ROU, \text{இலிருந்து } g = \frac{u}{5}.$$

$$\therefore u = 5g.$$

5

$$\Delta STU, \text{ இலிருந்து } g = \frac{ST}{1} = ST.$$

5

உயரம் $OA = \text{Area of } ORST.$

$$= \frac{1}{2} (OR + ST) \times OT \quad 5$$

$$= \frac{1}{2} (u + g) \times 4 \quad 5$$

$$= \frac{1}{2} \times 6g \times 4$$

$$= 12g \quad 5$$

 P உடன் Q மோதுவதற்கு எடுத்த நேரம் T என்க

$$OA = \text{Area } VZMX + \text{Area } WZMY$$

$$= \text{Area } VWYX \quad 10$$

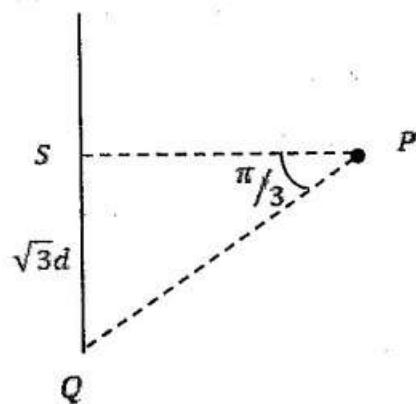
$$= \frac{1}{2} (VW + XT) \times ZM$$

$$\therefore 12g = \frac{1}{2} (6g + 6g) \times T \quad 10$$

$$\therefore T = 2 \text{ sec.} \quad 5$$

60

(b)



$$\underline{v}(S, E) = \uparrow u$$

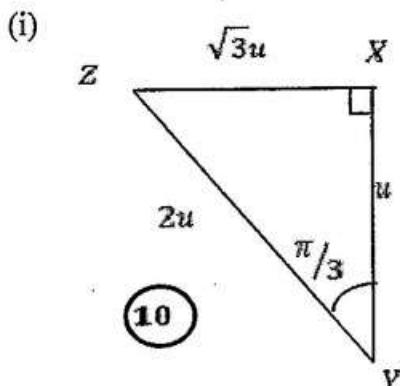
$$\underline{v}(P, E) = 2u$$

$$\underline{v}(Q, E) = 3u$$

$$\underline{v}(P, S) = \leftarrow$$



$$\underline{v}(Q, P) =$$



$$\underline{V}(P,S) = \underline{V}(P,E) + \underline{V}(E,S)$$

5

$$= \underline{V}(E,S) + \underline{V}(P,E)$$

5

$$= \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ}$$

$$= \overrightarrow{XZ}$$

5

$$\text{தேவையான நேரம்} = \frac{d}{xz} = \frac{d}{\sqrt{3}u} h.$$

25

$$\underline{V}(Q,P) = \underline{V}(Q,E) + \underline{V}(E,P)$$

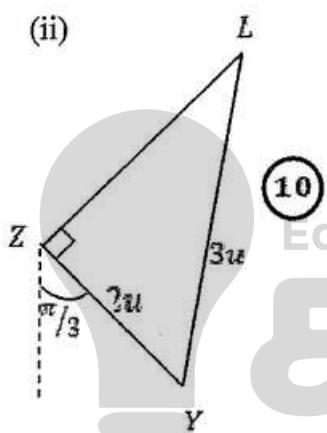
5

$$= \underline{V}(E,P) + \underline{V}(Q,E)$$

5

$$= \overrightarrow{ZY} + \overrightarrow{YL}$$

$$= \overrightarrow{ZL}$$

5

$$ZL = \sqrt{(3u)^2 - (2u)^2} = \sqrt{5}u$$

5

P இனை ஒழிடைமறிக்க எடுத்த நேரம் t_2 என்க

$$t_2 = \frac{\sqrt{3} d \sec(\pi/6)}{\sqrt{5} u}$$

10

$$= \frac{2d}{\sqrt{5}u} h.$$

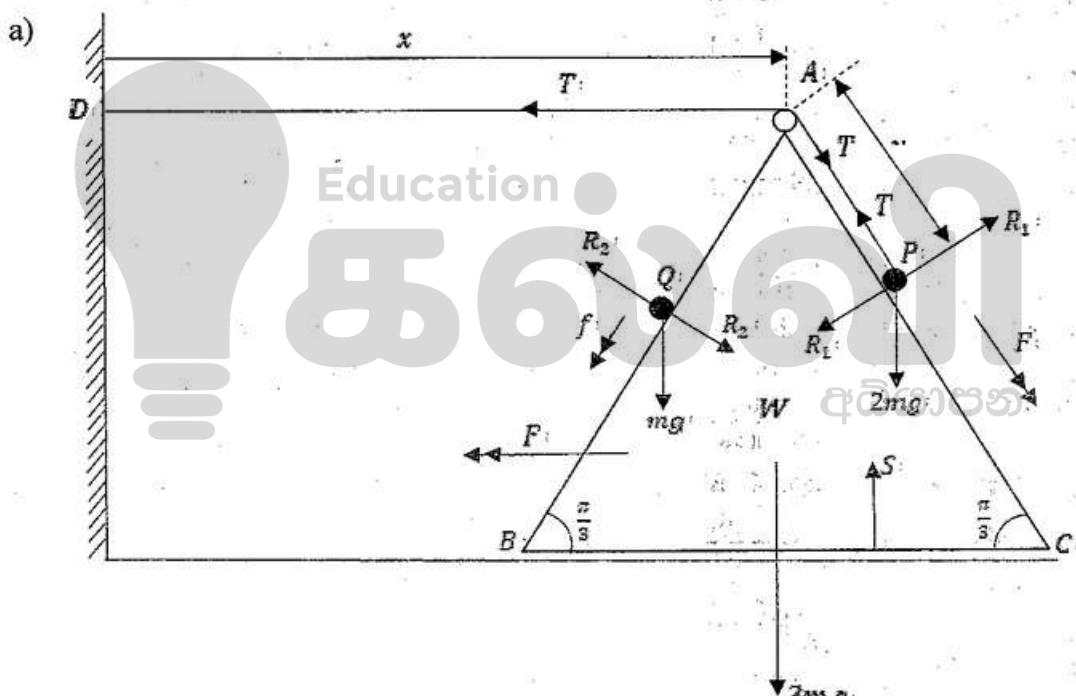
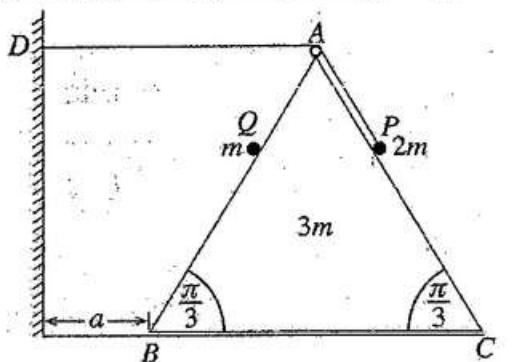
10

$\therefore t_1 < t_2$.

45

12.(a) உருவில் சமபக்க முக கோணி ABC ஆனது $AB = BC = AC = 6a$ ஆகவும் BC ஜக் கொண்டுள்ள முகம் ஓர் ஒப்பமான கிடை நிலத்தின் மீதும் இருக்குமாறு வைக்கப்பட்ட திணிவு $3m$ ஜ உடைய ஓர் ஒப்பமான சீரான ஆப்பின் புவியீர்ப்பு மையத்தினுடைன் நிலைக்குத்துக் குறுக்கு வெட்டாகும். AB, AC ஆகிய கோடுகள் அவற்றைக் கொண்டுள்ள முகங்களின் அதியுயர் சரிவுக் கோடுகளாகும். புள்ளி D ஆனது AD கிடையாக இருக்குமாறு ABC இன் தளத்தில் ஆப்பின் புள்ளி B இலிருந்து தூரம் a இல் உள்ள நிலைக்குத்துச் சுவர் மீதான ஒரு நிலைத்த புள்ளியாகும். A இல் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ள ஒரு சிறிய ஒப்பமான கப்பிக்கு மேலாகச் செல்லும் நீளம் $5a$ ஜ உடைய ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையின் ஒரு நுனி AC மீது வைக்கப்பட்டுள்ள திணிவு $2m$ ஜ உடைய ஒரு துணிக்கை P உடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கும். அதே வேளை மற்றைய நுனி சுவர் மீது உள்ள நிலைத்த புள்ளி D உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. திணிவு m ஜ உடைய ஒரு துணிக்கை Q ஆனது AB மீது தாங்கப்பட்டுள்ளது. உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு $AP = AQ = a$ ஆக இருக்கத் தொகுதி ஒய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது.

ஆப்பு சுவரில் அடிக்கும் கணத்தில் ஆப்புத் தொடர்பாக Q இன் வேகத்தைத் துணிவதந்துப் போதிய சமன்பாடுகளைப் பெறுக.



$$x + y = \text{cons} \quad 5.$$

$$\therefore \ddot{x} + \ddot{y} = 0. \quad (1) \quad 5$$

$$\underline{a}(W, E) = F \leftarrow \text{என்க}$$

$$\therefore \underline{a}(P, W) = F \quad \text{(by (1))} \quad 5$$

அத்துடன் $\underline{a}(Q,W) = f \not\leftarrow$ என்க

$F = ma$ இனை பிரயோகிக்க

$$\therefore \textcircled{P} \not\downarrow 2mg \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - T = 2m\left(F - F \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \quad \text{15}$$

$$\textcircled{Q} \not\leftarrow mg \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = m\left(f + F \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \quad \text{15}$$

தொகுதிக்கு (P, Q , and W) \leftarrow

$$T = 3mF + 2m\left(F - F \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) + m\left(F + f \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \quad \text{25}$$

$S = ut + \frac{1}{2}at^2$ இனை பிரயோகிக்க:

$$\leftarrow \textcircled{W} \quad a = \frac{1}{2}Ft^2 \quad \text{5}$$

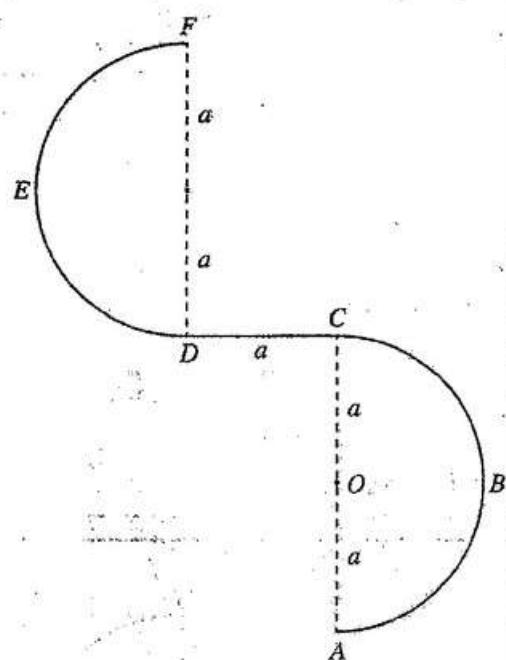
$v = u + at$ இனை பிரயோகிக்க:

$$v = Ft \quad \text{5}$$

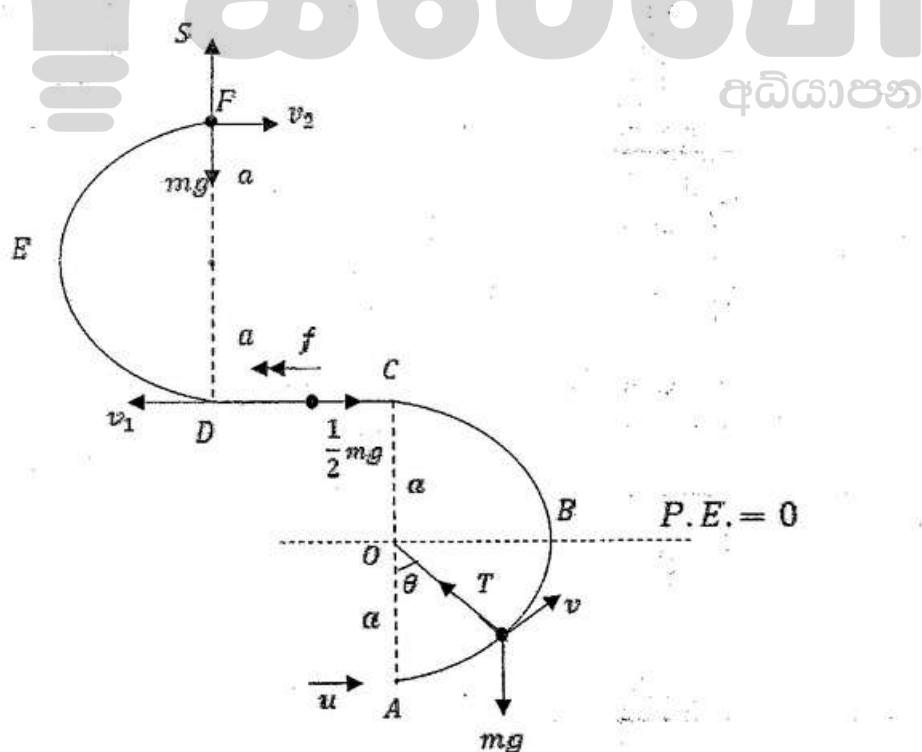
80

(b) உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு ஒரு மெல்லிய கம்பி $ABCDEF$ ஆனது நிலைக்குத்துத் தளத்தில் நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. பகுதி ABC ஆனது மையம் O ஜூயும் ஆரை a ஜூயும் கொண்ட ஒரு மெல்லிய ஓப்பமான அரைவட்டக் கம்பியாகும். பகுதி CD ஆனது நீளம் a ஜூ உடைய ஒரு மெல்லிய கரடான கிடைக் கம்பியாகும். பகுதி DEF உம் ஆரை a ஜூ உடைய ஒரு மெல்லிய ஓப்பமான அரைவட்டக் கம்பியாகும். AC, DF ஆகிய விட்டங்கள் நிலைக்குத்தான்வை. தினிவு m ஜூ உடைய ஒரு சிறிய ஓப்பமான மணி P ஆனது A இல் வைக்கப்பட்டுக் கிடையாக ஒரு வேகம் u ($>3\sqrt{ag}$) கொடுக்கப்படும் அதே வேளை அது கம்பி வழியே இயங்கத் தொடங்குகின்றது. மணியின் C இலிருந்து D வரையுள்ள இயக்கத்தில் மணி மீது கம்பியின் மூலம் பிரயோகிக்கப்படும் உராய்வு விசையின் பருமன் $\frac{1}{2}mg$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. மணி P இன் A இலிருந்து C வரையுள்ள இயக்கத்தில் OP ஆனது \overrightarrow{OA} உடன் கோணம் θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) ஜூ ஆக்கும்போது அதன் கதி v ஆனது $v^2 = u^2 - 2ag(1 - \cos \theta)$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.

F இல் கம்பியைப் பிரிந்து செல்வதற்குச் சுற்று முன்னர் மணி P இன் கதி w ஆனது $w^2 = u^2 - 9ag$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டி, அக்கணத்தில் கம்பியின் மூலம் மணி P மீது பிரயோகிக்கப்படும் மறுதாக்கத்தைக் காண்க.



b)



சக்திக்காப்பின் படி,

$$\frac{1}{2}mv^2 - ma \cos \theta = \frac{1}{2}mu^2 - mga \quad (15)$$

$$\therefore v^2 = u^2 - 2ga(1 - \cos \theta) \quad (5)$$

$$\theta = \pi, \text{ ஆகையில் } v^2 = u^2 - 4ga \quad (1)$$

C இலிருந்து D இற்கு, $\leftarrow F = m\underline{a}$:

$$-\frac{1}{2}mg = m\underline{f}$$

$$\therefore f = -\frac{g}{2} \quad (10)$$

$$\leftarrow v^2 = u^2 + 2as : v_1^2 = (u^2 - 4ga) - 2 \cdot \frac{g}{2}a \quad (10)$$

$$= u^2 - 5ga. \quad (10)$$

$$(1) \text{ இலிருந்து } \omega^2 = v_1^2 - 4ga$$

$$= u^2 - 9ga. \quad (5)$$

$\underline{F} = m\underline{a} \downarrow$ at F:

$$mg - S = m \frac{\omega^2}{a}$$

$$\therefore S = mg - \frac{m}{a}(u^2 - 9ga)$$

$$= \frac{m}{a}(10ag - u^2)$$

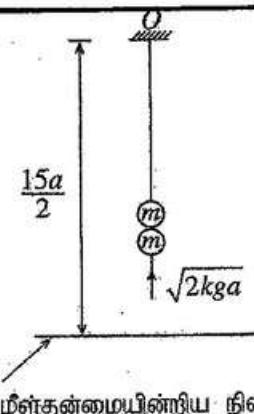
5

5

70

13. இயற்கை நீளம் $4a$ ஜி உடைய ஒரு இலோசான மீள்தன்மை இழையின் ஒரு நுனி ஒரு நிலைத்த புள்ளி O உடனும் மற்றைய நுனி திணிவு m ஜி உடைய ஒரு துணிக்கை P உடனும் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. துணிக்கை O இற்குக் கீழே தூரம் $5a$ இல் நாப்பத்தில் தொங்குகின்றது. இழையின் மீள்தன்மை மட்டு $4mg$ எனக் காட்டுக.

இப்போது திணிவு m ஜி உடைய வேறொரு துணிக்கை Q நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி இயங்கி P உடன் மோதி ஒன்றிணைந்து ஒரு சேர்த்தித் துணிக்கை R ஜி ஆக்குகின்றது. துணிக்கை P உடன் மோதுவதற்குச் சந்று முன்னர் துணிக்கை Q இன் கதி $\sqrt{2kga}$ ஆகும். R இயங்கத் தொடங்கும் வேகத்தைக் காண்க.



மீள்தன்மையின்றிய நிலம்

இழை தளர்வறாமல் இருந்து பின்னர் நடைபெறும் இயக்கத்தில் சேர்த்தித் துணிக்கை R இற்கு O இலிருந்து உள்ள தூரம் x ஆனது சமன்பாடு $\ddot{x} + \frac{g}{2a}(x - 6a) = 0$ ஜித் திருப்தியாக்குகின்றதெனக் காட்டுக.

$$X = x - 6a \text{ எனக் கீழத்திற்கொண்டு, } \ddot{X} + \frac{g^2}{2a}X = 0 \text{ எனக் காட்டுக; இங்கு } y = \sqrt{\frac{g}{2a}}.$$

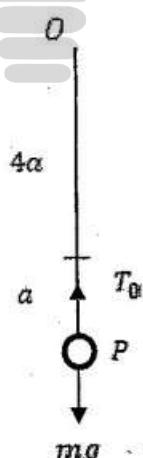
மேற்குறித்த எளிய இசை இயக்கத்தின் மையத்தையும் குத்திரம் $\dot{X}^2 = a^2(c^2 - X^2)$ ஜப் பயன்படுத்தி வீச்சும் c ஜூம் காண்க.

$k > 3$ எனின், இழை தளர்வறுமெனக் காட்டுக.

இப்போது, $k = 8$ எனக் கொள்வோம். P, Q ஆகிய துணிக்கைகள் ஒன்றிணையும் கணத்திலிருந்து புள்ளி O இற்குக் கீழே தூரம் $\frac{15}{2}a$ இல் ஒரு மீள்தன்மையின்றிய கிடை நிலத்தில் அடிப்பதற்குச் சேர்த்தித் துணிக்கை R எடுக்கும் நேரத்தைக் காண்க.

மேலும், சேர்த்தித் துணிக்கை R நிலத்தில் அடித்த பின்னர் அடையும் உயர்ந்தப்பட்ச உயரத்தையும் காண்க.

P இன் சமநிலைக்கு



For the equilibrium of,

$$T_0 = mg \quad (5)$$

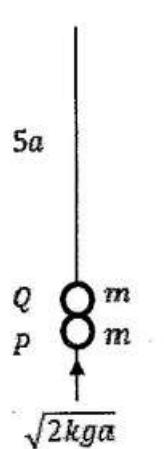
$$T_0 = \frac{\lambda a}{4a} = \frac{\lambda}{4} \quad (5)$$

$$\therefore \lambda = 4mg$$

அடியாறு

5

15

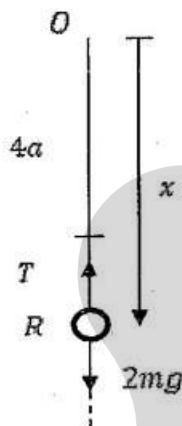


Applying $\underline{I} = \Delta (mv)$ for P Q:

$$\uparrow 0 = 2mu - m\sqrt{2kga} \quad (5)$$

$$\therefore u = \sqrt{\frac{kga}{2}} \quad (5)$$

10



Rஇற்கு $F = ma$ இனை பிரயோகிக்க :

$$T - 2mg = -2m\ddot{x} \quad (10)$$

$$T = 4mg \frac{(x - 4a)}{4a} \quad (5)$$

$$\therefore \frac{mg}{a}(x - 4a) - 2mg = -2m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{g}{2a}(x - 6a) = 0 \quad (1)$$

அவியாபந

20

$$X = x - 6a$$

$$\therefore \dot{X} = \dot{x}$$

(5)

$$\therefore \ddot{X} = \ddot{x}$$

$$(1) \Rightarrow \ddot{X} + \omega^2 X = 0, \text{இங்கு } \omega = \sqrt{\frac{g}{2a}}.$$

(5)

10

மையம் $X = 0$ இனால் தரப்படும்

i.e. $x = 6a.$ (5)

$$\dot{X}^2 = \omega^2(c^2 - X^2) \quad (2)$$

$$x = 5a, \text{ ஆகையில் } X = -a, \dot{X} = -\frac{1}{2}\sqrt{2kga}.$$

(5)

$$(2) \Rightarrow \frac{kga}{2} = \frac{g}{2a}(c^2 - a^2).$$

$$\Rightarrow ka^2 = c^2 - a^2.$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{k+1}a.$$
 (5)

15

$k > 3.$ என்க, எனவே $c > 2a.$

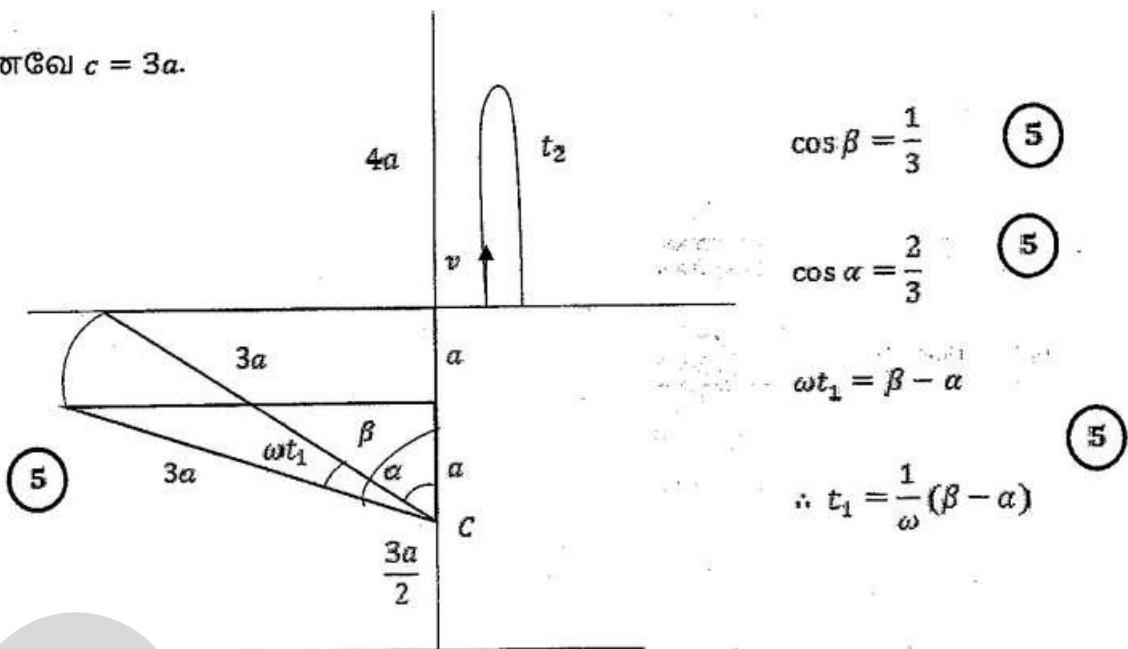
\therefore வீச்சம் $> 2a.$

\therefore எனவே இழை தளர்வுறும் (5)

10

$$k = 8$$

எனவே $c = 3a$.



$$\cos \beta = \frac{1}{3}$$

5

$$\cos \alpha = \frac{2}{3}$$

5

$$\omega t_1 = \beta - \alpha$$

5

$$\therefore t_1 = \frac{1}{\omega}(\beta - \alpha)$$

இப்பொழுது

$$v^2 = \frac{g}{2\alpha}(9a^2 - 4a^2)$$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{5}{2}ga}$$

5

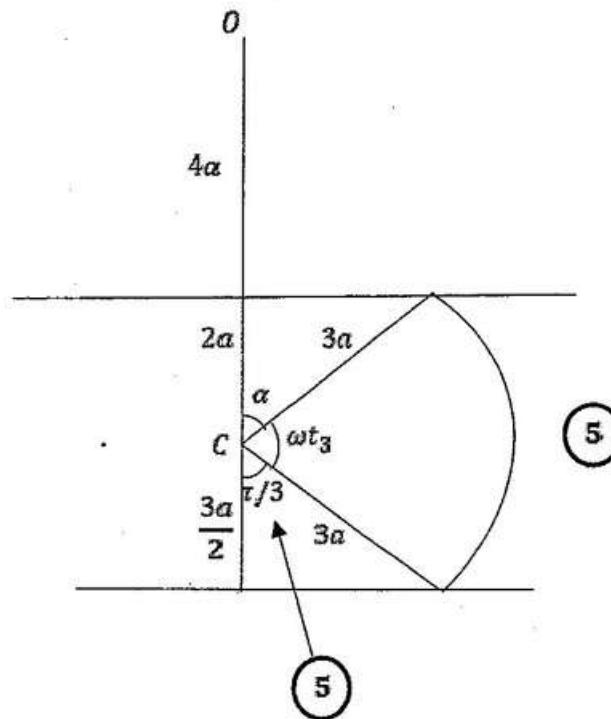
Under gravity: $s = ut + \frac{1}{2}at^2$

5

$$0 = vt_2 - \frac{1}{2}gt_2^2.$$

5

$$\therefore t_2 = \frac{2v}{g} = \frac{2}{g} \sqrt{\frac{5}{2}ga} = \sqrt{\frac{10a}{g}}$$



$$\omega t_3 = \frac{2\pi}{3} - \alpha \quad (5)$$

$$\therefore t_3 = \frac{1}{\omega} \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha \right)$$

$$\therefore \text{தேவையான நேரம்} = t_1 + t_2 + t_3$$

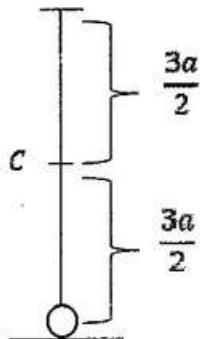
$$= \frac{1}{\omega} (\beta - \alpha) + \sqrt{\frac{10a}{g}} + \frac{1}{\omega} \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha \right)$$

$$= \sqrt{\frac{10a}{g}} + \sqrt{\frac{2a}{g} \left\{ \frac{2\pi}{3} + \cos^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) - 2 \cos^{-1} \left(\frac{2}{3} \right) \right\}} \quad (10)$$

60

தரையை அடித்த பின் R எழிமைஇசை இயக்கத்தை மட்டும் ஆற்றும் 5

எனவே அதியுயர் உயரம்



After hitting the floor, performs only simple harmonic motion.

$$\therefore \text{The maximum height} = \frac{3a}{2} + \frac{3a}{2} \\ = 3a$$

5

10



4. (a) $\underline{a}, \underline{b}$ ஆகியன பூச்சியமல்லாதனவும் சமாந்தரமல்லாதனவுமான காவிகள் எனவும் $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ எனவும் கொள்வோம்.

$$\lambda \underline{a} + \mu \underline{b} = \underline{0} \text{ எனின், } \lambda = 0 \text{ எனவும் } \mu = 0 \text{ எனவும் காட்டுக.}$$

ABC ஒரு முக்கோணியைக் கொள்வோம். AB இன் நடுப் புள்ளி D உம் CD இன் நடுப் புள்ளி E உம் ஆகும். BC , (நீட்டப்பட்ட) AE ஆகிய கோடுகள் F இற் சந்திக்கின்றன. $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$ எனவும் $\overrightarrow{AC} = \underline{b}$ எனவும் கொள்வோம். முக்கோணிக் கூட்டல் விதியைப் பயன்படுத்தி $\overrightarrow{AE} = \frac{\underline{a} + 2\underline{b}}{4}$ எனக் காட்டுக.

$$\overrightarrow{AF} = \underline{a} \overrightarrow{AE} \text{ ஆகவும் } \overrightarrow{CF} = \underline{b} \overrightarrow{CB} \text{ ஆகவும் இருப்பது ஏனென விளக்குக; இங்கு } \underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}.$$

$$\text{முக்கோணி } ACF \text{ ஐக் கருதுவதன் மூலம் } (\alpha - 4\beta)\underline{a} + 2(\alpha + 2\beta - 2)\underline{b} = \underline{0} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

இதிலிருந்து, α, β ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(b) ABC ஆனது ஒரு பக்கத்தின் நீளம் $2a$ ஆகவுள்ள ஒரு சமபக்க முக்கோணி எனவும் D, E, F ஆகியன முறையே AB, BC, AC ஆகியவற்றின் நடுப் புள்ளிகள் எனவும் கொள்வோம். $2P, \sqrt{3}P, 2\sqrt{3}P, aP$ என்னும் பருமன்களை உடைய விசைகள் முறையே $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BC}$ வழியே தாக்குகின்றன. இவ்விசைத் தொகுதியின் விளையுள் \overrightarrow{AC} இந்குச் சமாந்தரமாகத் தாக்குகின்றதெனத் தரப்பட்டுள்ளது. a இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

விசைத் தொகுதி A இனுடாகத் தாக்கும் பருமன் R ஜ உடைய ஒரு தனி விசையுடன் பருமன் G ஜ உடைய ஓர் இணைக்குச் சமவலுவுள்ளது. R, G ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இவ்விசைத் தொகுதியின் விளையுளின் பருமனையும் திசையையும் எழுதி, AB ஜ விளையுளின் தாக்கக் கோடு சந்திக்கும் புள்ளிக்கு A இலிருந்து உள்ள தூரத்தைக் காண்க.

இப்போது பருமன் H ஜ உடைய ஓர் இணை தொகுதியுடன் சேர்க்கப்படுகின்றது. இப்புதிய தொகுதியின் விளையுள் புள்ளி B இனுடாகத் தாக்குகின்றது. H இன் பெறுமானத்தையும் இவ்வினையின் போக்கையும் காண்க.

(a)

$$\underline{a}, \underline{b} \neq \underline{0}, \underline{a} \neq \underline{b}$$

$$\lambda \underline{a} + \mu \underline{b} = \underline{0} \quad (1) \quad 5$$

$$\text{If } \lambda \neq 0, \text{ எனின் } \underline{a} = -\frac{\mu}{\lambda} \underline{b}.$$

இது தரப்பட்ட நிபந்தனையுடன் முரண்படுகின்றது.

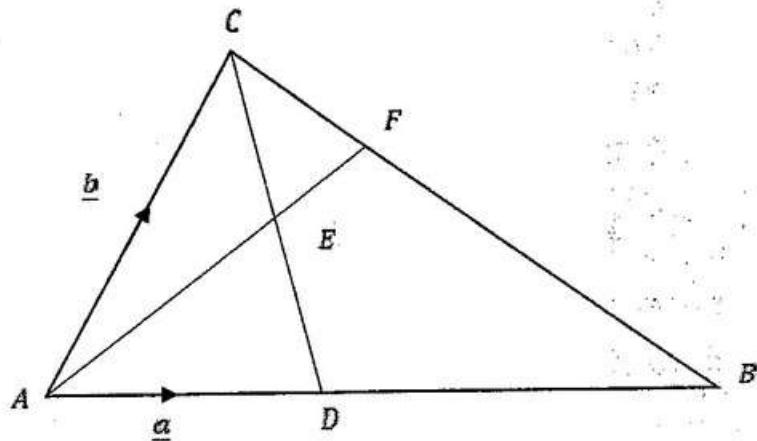
$$\therefore \lambda = 0. \quad 5$$

இப்பொழுது (1) இலிருந்து $\mu \underline{b} = \underline{0}$

$$\underline{b} \neq \underline{0}, \text{ ஆகையால் } \mu = 0$$

$$\therefore \lambda = 0, \mu = 0$$

15



$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$$

$$= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$$

$$= \frac{1}{2}\underline{a} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{1}{2}\underline{a} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\underline{a} + \underline{b}\right)$$

$$= \frac{\underline{a} + 2\underline{b}}{4}$$

(5)

(5)

(5)

(5)

20

AF || AE (or A, E, F ஒரே நெர்கோட்டில் உள்ளவை) 5CF || CB (or C, F, B ஒரே நெர்கோட்டில் உள்ளவை) 5

10

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} \quad (5)$$

$$\therefore \alpha \overrightarrow{AE} = \underline{b} + \beta \overrightarrow{CB}$$

$$\therefore \alpha \left(\frac{\underline{a} + 2\underline{b}}{4} \right) = \underline{b} + \beta (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) \quad (5)$$

$$\therefore \alpha \underline{a} + 2\alpha \underline{b} = 4\underline{b} + 4\beta (-\underline{b} + \underline{a})$$

$$\therefore (\alpha - 4\beta) \underline{a} + (2\alpha + 4\beta - 4) \underline{b} = 0 \quad (5)$$

$\underline{a}, \underline{b} \neq 0$, $\underline{a} \# \underline{b}$ இலிருந்து

$$\alpha - 4\beta = 0 \text{ or } 2\alpha + 4\beta - 4 = 0$$

$$\therefore \alpha = \frac{4}{3} \text{ and } \beta = \frac{1}{3}$$

(5)

(5)

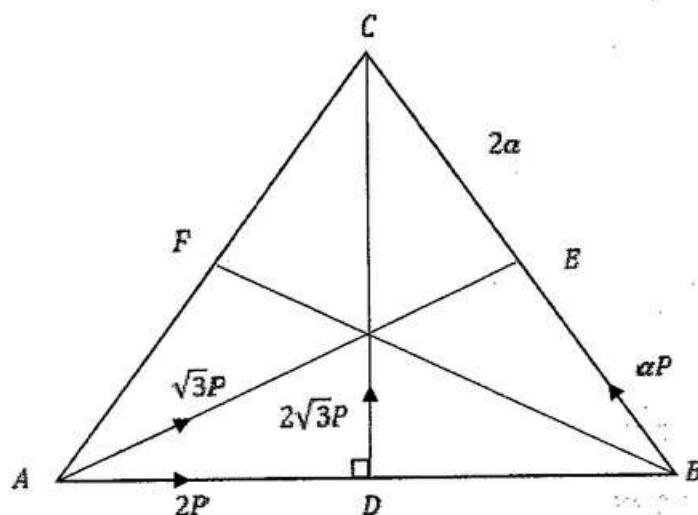
Education

25

கல்வி

அடியாளத்துறை

(b)



$$\rightarrow X = 2P + \sqrt{3}P \cos \frac{\pi}{6} - aP \cos \frac{\pi}{3} \quad (5)$$

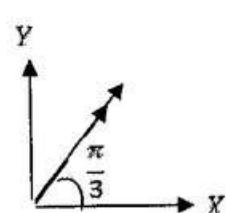
$$= 2P + \frac{3P}{2} - \frac{aP}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(7 - \alpha)P$$

$$\uparrow Y = \sqrt{3}P \sin \frac{\pi}{6} + 2\sqrt{3}P + aP \sin \frac{\pi}{3} \quad (5)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}P + 2\sqrt{3}P + \frac{\sqrt{3}}{2}aP$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}(5 + \alpha)P$$



$$\tan \frac{\pi}{3} = \frac{Y}{X} \quad (5)$$

$$\therefore Y = \sqrt{3}X$$

$$\text{i.e. } \frac{\sqrt{3}}{2}(5 + \alpha)P = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}(7 - \alpha)P$$

$$\therefore \alpha = 1 \quad (5)$$

20

OR



$$\alpha P \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 2\sqrt{3}P \left(\frac{1}{2} \right) - \sqrt{3}P \left(\frac{1}{2} \right) - 2P \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0. \quad (15)$$

$$\Rightarrow \alpha = 1 + 2 - 2.$$

$$\Rightarrow \alpha = 1.$$

5

20



$$R = \sqrt{3}P \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 2P \left(\frac{1}{2} \right) + 2\sqrt{3}P \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + P \left(\frac{1}{2} \right) \quad (10)$$

$$= \frac{3P}{2} + \frac{2P}{2} + \frac{6P}{2} + \frac{P}{2}$$

$$= 6P.$$

5

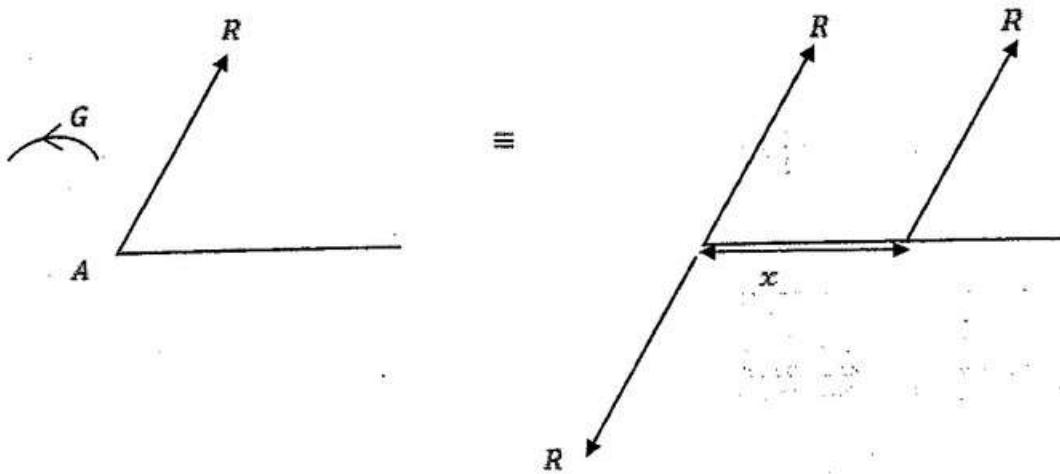


$$A; G = 2\sqrt{3}P.a + P \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right).2a \quad (5)$$

$$G = 2\sqrt{3}Pa \left(1 + \frac{1}{2} \right)$$

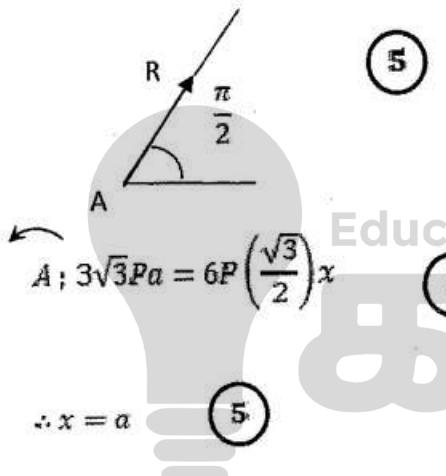
$$G = 3\sqrt{3}Pa \quad (5)$$

25

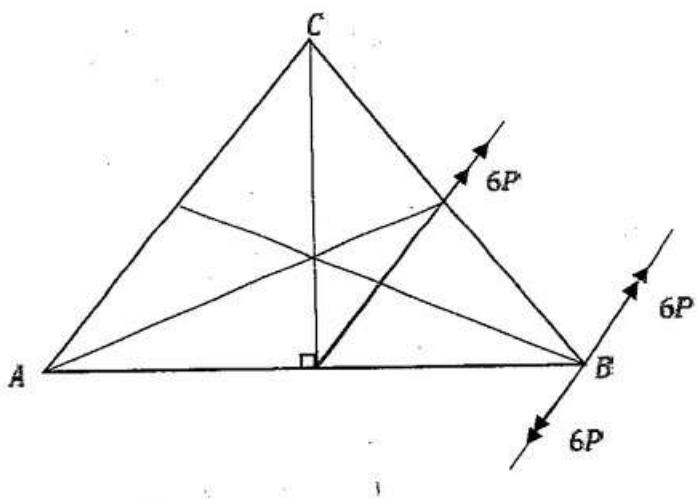


$$\text{விளையுளின் பருமன்} = R = 6P \quad (5)$$

திசை:



20



(5)

$$H = 6P.a \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= 3\sqrt{3}Pa \quad \textcircled{5}$$

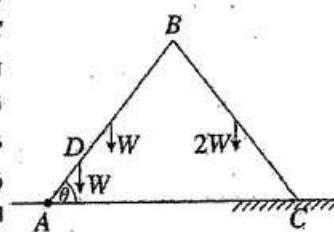
மணிக்கூட்டு திசைக்கு எதிர் திசையின் படி

5

15

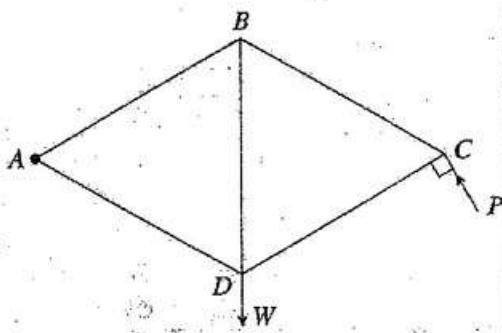


15.(a) ஒவ்வொன்றும் நீளம் $2a$ ஜு உடைய AB, BC என்னும் இரு ச்ரான் கோல்கள் முனை B இல் ஒப்பாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. AB, BC ஆகிய கோல்களின் நிறைகள் முறையே $W, 2W$ ஆகும். முனை A ஒரு கிடை நிலத்தின் மீதுள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளியில் ஒப்பாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. கோல் AB மது, $AD = \frac{a}{2}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக, உள்ள புள்ளி D இல் நிறை W ஜு உடைய ஒரு துணிக்கை இணைக்கப்பட்டுள்ளது. உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு தொகுதி ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே, $B\hat{A}C = \theta$ ஆகவும் கோல் BC இன் முனைப் புள்ளி C மேற்குறித்த கிடை நிலத்தின் ஒரு கரடான பகுதி மீதும் இருக்குமாறு நாப்பத்தில் உள்ளது. கோல் BC இந்கும் நிலத்திற்குமிடையே உள்ள உராய்வுக் குணகம் μ ஆகும் $\cot \theta \leq \frac{15}{7} \mu$ எனக் காட்டுக.



CB இன் மூலம் AB மது மூட்டு B இல் உருந்தப்படும் மறுதாக்கத்தையும் காணக்.

(b) உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ள சட்டப்படல், அவற்றின் முனைகளில் ஒப்பாக மூட்டப்பட்ட சம நீளமுள்ள AB, BC, CD, DA, DB என்னும் ஜங்கு இலைசான கோல்களைக் கொண்டுள்ளது. ஒரு கைம் W ஆனது மூட்டு D இல் தொங்கவிடப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை சட்டப்படல் A இல் ஒரு நிலைத்த புள்ளியில் ஒப்பாகப் பிணைக்கப்பட்டு, ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில், BD நிலைக்குத்தாக இருக்க அதற்கு மூட்டு C இல் கோல் CD இற்குச் செங்குத்தாக உருவிற் காட்டப்பட்டுள்ள திசையில் பிரயோகிக்கப்படும் ஒரு விசை P இன் மூலம், நாப்பத்தில் வைக்கப்படுகிறது.



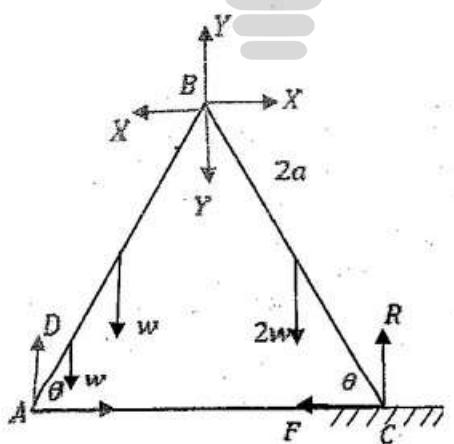
(i) P இன் பெறுமானத்தைக் காணக்.

(ii) போவின் குறிப்பிடப்பட்ட மயன்படுத்தி, C, B, D ஆகிய மூட்டுகளுக்கு ஒரு தகைப்பு வரிப்பட்டதை வரைக இதிலிருந்து, கோல்களில் உள்ள தகைப்புகளை அவை இழுவைகளா, உதைப்புகளா எனக் குறிப்பிட்டுக், காணக்.

(a)

தொகுதிக்கு;

அடியாபன



$$R \cdot 4a \cos \theta - w \left(\frac{a}{2} \cos \theta + a \cos \theta \right) - 2w(2a \cos \theta - a \cos \theta) = 0$$

$$\therefore 4R = \frac{3}{2}w + 6w$$

$$R = \frac{15}{8}w.$$

5

15

BC : இற்கு

$$B \quad 2wa \cos \theta + Fa \sin \theta - R \cdot 2a \cos \theta = 0$$

10

$$\therefore w + F \tan \theta = R$$

$$\therefore F \tan \theta = \frac{15}{8}w - w.$$

$$\therefore F = \frac{7}{8}w \cot \theta. \quad \textcircled{5}$$

சமநிலைக்கு,

$$\mu \geq \frac{F}{R}.$$

$$\frac{7}{8}w \cot \theta \leq \mu \frac{15}{8}w$$

$$\cot \theta \leq \frac{15}{7}\mu. \quad \textcircled{5}$$

45

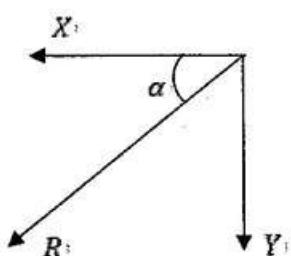
$$BC: \quad X = F = \frac{7}{8}w \cot \theta \quad \textcircled{5}$$

$$\uparrow R + Y = 2w \quad \textcircled{5}$$

$$Y = 2w - R$$

$$= 2w - \frac{15}{8}$$

$$= \frac{w}{8} \quad \textcircled{5}$$



$$R^2 = X^2 + Y^2$$

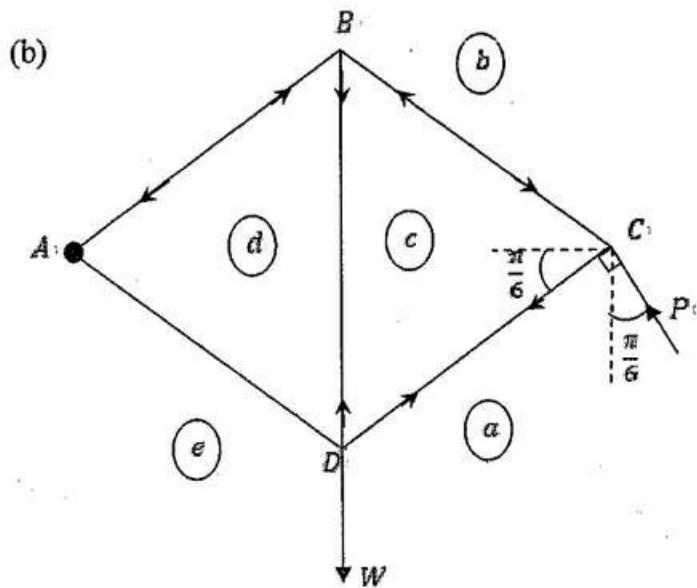
$$= \frac{49}{64}w^2 \cot^2 \theta + \frac{w^2}{64}$$

$$R = \frac{w}{8} \sqrt{1 + 49 \cot^2 \theta}$$

$$\tan \alpha = \frac{Y}{X} = \frac{\frac{w}{8}}{\frac{7w}{8} \cot \theta} = \frac{\tan \theta}{7} \quad \textcircled{5}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{\tan \theta}{7} \right)$$

25

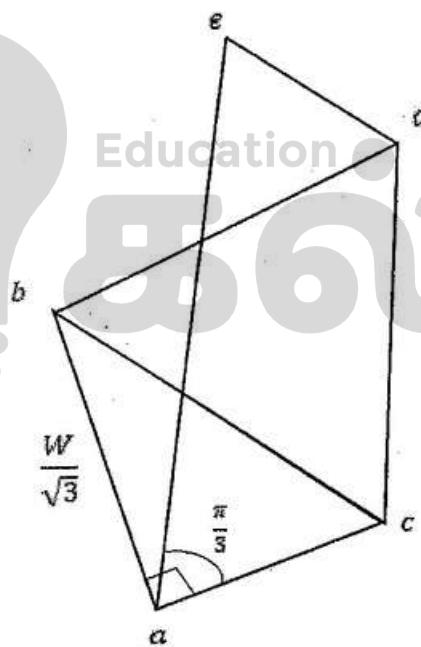


$$A \cdot P \cos \frac{\pi}{6} \cdot 2x - Wx = 0 \quad (5)$$

(Here $AC = 2x$)

$$\therefore P = \frac{W}{\sqrt{3}} \quad (5)$$

10



தொகை அடியாண
10 + 10 + 10

Each Joint 10

30

கோல்	இழுவை	தகைப்பு
AB		$\frac{2W}{3}$
BC		$\frac{2W}{3}$
CD	$\frac{W}{3}$	
DA	$\frac{W}{3}$	
BD	$\frac{2W}{3}$	

15 + 25

40



16. (i) ஆரை a ஜூ உடைய ஒரு அரைவட்ட வில்லின் வடிவமுள்ள ஒரு மெல்லிய சீரான கம்பியின் திணிவு மையம் அதன் மையத்திலிருந்து தூரம் $\frac{2a}{\pi}$ இலும்
- (ii) உயரம் h ஜூ உடைய ஒரு சீரான பொட்ட செவ்வட்டக் கூம்பின் திணிவு மையம் அதன் அடியின் மையத்திலிருந்து தூரம் $\frac{1}{3}h$ இலும்

உள்ளளவெணக் காட்டுக.

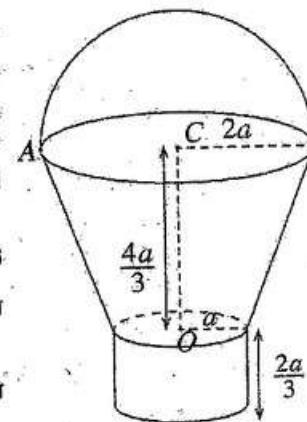
ஒருவிற் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு மேல் வட்ட விளிம்பினதும் கீழ் வட்ட விளிம்பினதும் ஆரைகள் முறையே $2a$, a ஆகவும் உயரம் $\frac{4a}{3}$ ஆகவும் உள்ளன. ஒரு பொட்ட செவ்வட்டக் கூம்பின் அடித்துண்டின் வடிவமுள்ள ஒரு சீரான மெல்லிய ஓட்டுடன் பின்வரும் பகுதிகளை ஒவ்வொன்றும் ஒட்டினைச் சந்திக்கும் இடங்களில் விறைப்பாகப் பொருத்துவதன் மூலம் ஒரு வாளி செய்யப்பட்டுள்ளது.

- ஆரை a ஜூயும் மையம் O ஜூயும் கொண்ட ஒரு சீரான மெல்லிய வட்டத் தகடு
- ஆரை a ஜூயும் உயரம் $\frac{2a}{3}$ ஜூயும் கொண்ட பொட்ட செவ்வட்ட ஒருளையின் வடிவமுள்ள ஒரு சீரான மெல்லிய ஒடு
- ஆரை $2a$ ஜூயும் மையம் C ஜூயும் கொண்ட ஒரு அரைவட்டத்தின் வடிவமுள்ள ஒரு சீரான மெல்லிய கம்பி

அடித்துண்டு, தகடு, ஒருளை ஆகியவற்றின் அலகுப் பரப்பளவிற்கான திணிவு ரூம் கம்பியின் அலகு நீளத்திற்கான திணிவு $11a^2$ ரூம் ஆகும்.

வாளியின் திணிவு மையத்திற்கு O இலிருந்து உள்ள தூரம் $(10\pi + 27)\frac{a}{9\pi}$ எனக் காட்டுக.

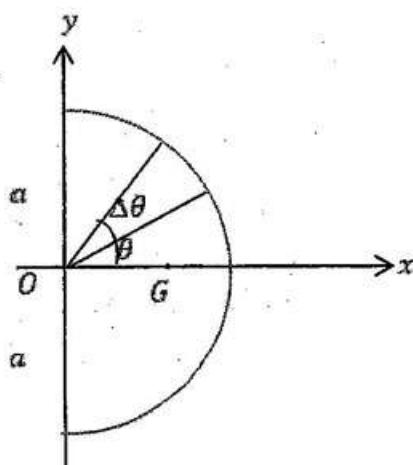
கம்பி அடித்துண்டின் மேல் விளிம்பைச் சந்திக்கும் புள்ளி A இலிருந்து வாளி ஒரு நிலைக்குத்து இழையினால் கயாதீனமாகத் தொங்கவிடப்படும்போது நாப்பத் தரணத்தில் OC கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் ஆக்கும் கோணத்தைக் காணக்.



(i)

கல்வி

அடியாபந



5

சமசீரின் படி திணிவு மையம் x -அச்சில் கிடக்கும்

$\Delta m = \rho \Delta \theta r$, இங்கு r என்பது ஓரலகிற்கான திணிவு ஆகும்.

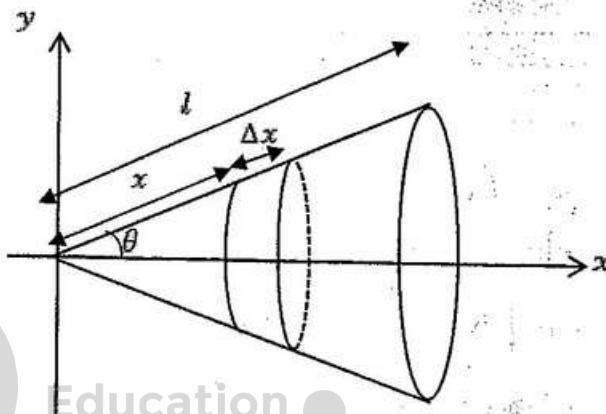
Let $OG = \bar{x}$. என்க

எனவே

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a\rho \cos \theta d\theta}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a\rho d\theta} = \frac{a \sin \theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}}{\theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}} = \frac{2a}{\pi} \quad \boxed{5}$$

30

(ii)



5

சமசீரின் படி திணிவு மீது மூலம் x -அச்சில் கிடக்கும் s.

$$h = l \cos \theta$$

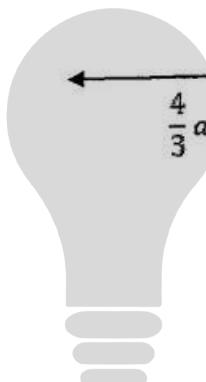
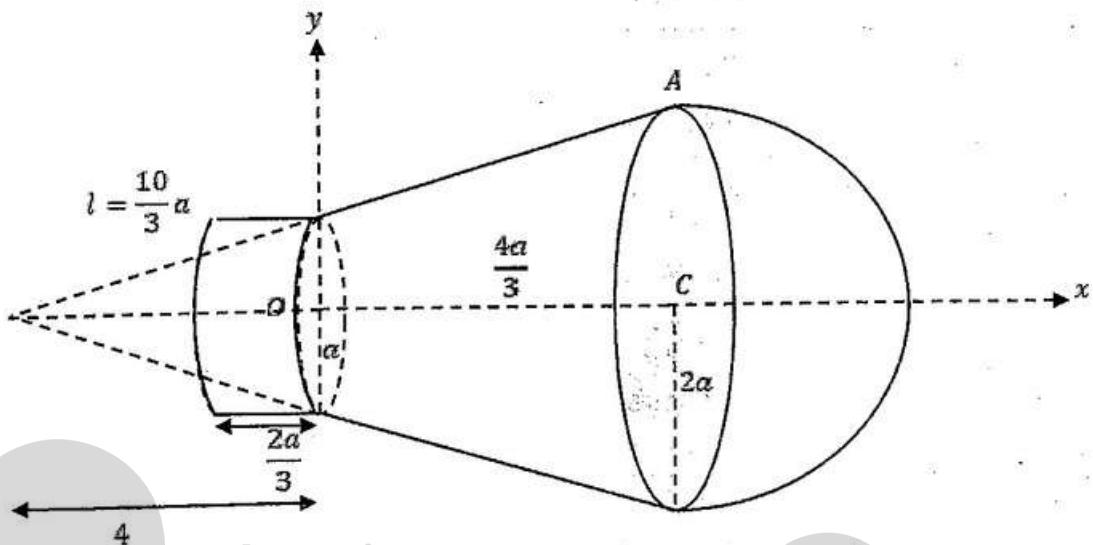
ஏதாவது

$\Delta m = 2\pi(x \sin \theta) \Delta x \sigma$, இங்கு σ என்பது ஓரலகிற்கான திணிவு ஆகும்

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int_0^l x \cos \theta 2\pi \sigma x \sin \theta dx}{\int_0^l 2\pi \sigma x \sin \theta dx} = \frac{\cos \theta \int_0^l x^2 dx}{\int_0^l x dx} = \frac{h/2 \frac{x^3}{3} \Big|_0^l}{\frac{x^2}{2} \Big|_0^l} = \frac{2h}{3} \quad \boxed{5}$$

30

∴ தேவையான தூரம் $= \frac{h}{3}$.



கல்வி

அடியாளம்

Object	Mass	Distance from O
	$\pi(2a)(11a\sigma) = 22\pi a^2 \sigma$ (5)	$\frac{4}{3}a + 2\frac{(2a)}{\pi} = \frac{4}{3}a + \frac{4a}{\pi}$ (5)
	$\pi(2a)\left(\frac{10}{3}a\right)\sigma = \frac{20}{3}\pi a^2 \sigma$ (5)	$\left[\frac{2}{3}\left(\frac{8}{3}a\right) - \frac{4}{3}a\right] = \frac{4}{9}a$ (5)
	$\pi(a)\left(\frac{5}{3}a\right)\sigma = \frac{5}{3}\pi a^2 \sigma$ (5)	$-\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}a\right) = -\frac{4}{9}a$ (5)
	$2\pi a\left(\frac{2}{3}a\right)\sigma = \frac{4}{3}\pi a^2 \sigma$ (5)	$-\frac{1}{3}a$ (5)
	$\pi a^2 \sigma$	0
	$22\pi a^2 \sigma + \frac{20}{3}\pi a^2 \sigma + \frac{5}{3}\pi a^2 \sigma + \frac{4}{3}\pi a^2 \sigma = \frac{88}{3}\pi a^2 \sigma$ (5)	\bar{x}

சமச் சீரின்படி திணிவு மையம் x – அச்சில் இருக்கும்.

(5)

$$\frac{88}{3}\pi a^2 \sigma \bar{x} = 22\pi a^2 \sigma \left(\frac{4}{3}a + \frac{4a}{\pi}\right) + \frac{20}{3}\pi a^2 \sigma \left(\frac{4}{9}a\right) - \frac{5}{3}\pi a^2 \sigma \left(-\frac{4}{9}a\right) + \frac{4}{3}\pi a^2 \sigma \left(-\frac{1}{3}a\right)$$

$$\frac{88}{3}\bar{x} = 4a \left(\frac{22}{3} + \frac{22}{\pi} + \underbrace{\frac{20}{27}}_{\frac{5}{9}} + \frac{5}{27} - \frac{1}{9} \right) \quad (15)$$

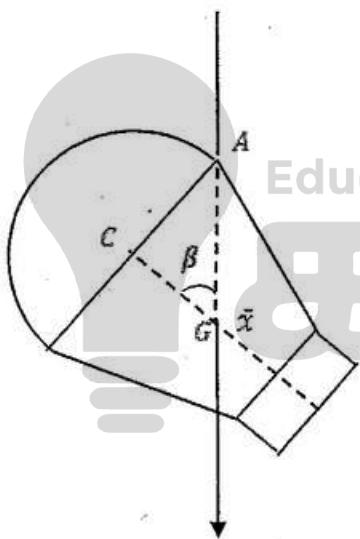
[22]
27

$$\frac{88}{3}\bar{x} = 22 \times 4a \left(\frac{10}{27} + \frac{22}{\pi} \right)$$

$$\frac{88}{3}\bar{x} = 88a \left(\frac{(10\pi + 27)}{27\pi} \right)$$

$$\bar{x} = \frac{a}{9\pi} (10\pi + 27) \quad (5)$$

75



(5)

$$\tan \beta = \frac{AC}{CG} = \frac{2a}{\frac{4}{3}a - \bar{x}}$$

(5)

$$= \frac{18\pi}{27 - 2\pi}$$

(5)

$$\therefore \beta = \tan^{-1} \left(\frac{18\pi}{27 - 2\pi} \right)$$

உடையாப்பன்

15

17.(a) A, B என்னும் இரு சர்வசமப் பெட்டிகள் ஒவ்வொன்றிலும் அவற்றின் நிறங்களைத் தவிர எல்லா அம்சங்களிலும் சர்வசமமான 10 பந்துகள் உள்ளன. பெட்டி A இல் 6 வெள்ளைப் பந்துகளும் 4 சிவப்புப் பந்துகளும் பெட்டி B இல் 8 வெள்ளைப் பந்துகளும் 2 சிவப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. ஒரு பெட்டியை எழுமாற்றாகத் தெரிந்தெடுத்து, அப்பெட்டியிலிருந்து ஒன்றின்பின் மற்றதாகப் பிரதிவைப்பு இல்லாமல் எழுமாற்றாக 3 பந்துகள் வெளியே எடுக்கப்படுகின்றன.

- (i) இரு சிவப்புப் பந்துகளும் ஒரு வெள்ளைப் பந்தும் வெளியே எடுக்கப்படுவதற்கான,
- (ii) இரு சிவப்புப் பந்துகளும் ஒரு வெள்ளைப் பந்தும் வெளியே எடுக்கப்படுகின்றனவெனத் தரப்படும்போது பெட்டி A தெரிந்தெடுக்கப்பட்டமைக்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(b) தரவுத் தொடை $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ இன் இடையும் நியம விலகலும் முறையே \bar{x} , σ_x எனும் $i = 1, 2, \dots, n$ இங்கு $y_i = \frac{x_i - \alpha}{\beta}$ எனும் கொள்வோம்; இங்கு $\alpha, \beta (> 0)$ ஆகியன மெய்ம் மாறிலிகளாகும். $\bar{y} = \frac{\bar{x} - \alpha}{\beta}$ எனும் $\sigma_y = \frac{\sigma_x}{\beta}$ எனும் காட்டுக; இங்கு \bar{y}, σ_y ஆகியன முறையே தரவுத் தொடை $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ இன் இடையும் நியம விலகலும் ஆகும்.

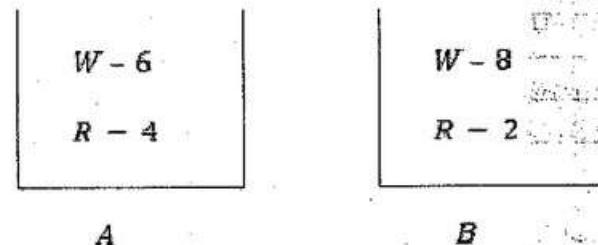
ஒரு கம்பனியின் 100 சேவையாளர்களின் ஒரு காப்புறுதித் திட்டத்திற்கான மாதத் தவணைக் கட்டணங்கள் பின்வரும் மீறிறன் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

மாதத் தவணைக் கட்டணம் (ரூபாய்) x	சேவையாளர்களின் எண்ணிக்கை
1500 – 3500	30
3500 – 5500	40
5500 – 7500	20
7500 – 9500	10

உருமாற்றம் $y = \frac{x - 500}{1000}$ ஐப் பயன்படுத்தி y இன் இடையையும் நியம விலகலையும் 3(இடை-இடையம்) நியம விலகல் இனால் வரையறுக்கப்படும் y இன் ஓராயக் குணகத்தையும் மதிப்பிடுக. இதிலிருந்து, x இன் இடை, நியம விலகல், ஓராயக் குணகம் ஆகியவற்றை மதிப்பிடுக.

அடியாரண

(a)



X என்பது இரண்டு சிவப்பு பந்துகளும் ஒரு வெள்ளை பந்தும்

5

எடுப்பதற்கான நிகழ்வு என்க.

$$(i) P(X) = P(X|A)P(A) + P(X|B)P(B) \quad (1)$$

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2} \quad 5$$

5

5

5

$$P(X|A) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{6}{8} + \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} + \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{3}{8}$$

$$= \frac{3}{10} \quad 5$$

$$P(X|B) = \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} \times \frac{8}{8} + \frac{2}{10} \times \frac{8}{9} \times \frac{1}{8} + \frac{8}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8}$$

அவியாபன

$$= \frac{1}{15} \quad 5$$

(1) இலிருந்து,

$$P(X) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{15} \times \frac{1}{2} = \frac{11}{60} \quad 5$$

55

(ii)

$$P(A|X) = \frac{P(X|A)P(A)}{P(X)}$$
5

[or Bayes' theor பேயரின் தெற்றம்]

$$= \frac{\frac{3}{10} \times \frac{1}{2}}{\frac{11}{60}}$$

$$= \frac{9}{11}$$
5

10

(b)

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$$
5

$$y_i = \frac{x_i - \alpha}{\beta}$$

$$= \frac{1}{n\beta} \sum_{i=1}^n (x_i - \alpha)$$

$$= \frac{1}{n\beta} \left\{ \sum_{i=1}^n x_i - n\alpha \right\}$$

$$= \frac{1}{\beta} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} - \alpha \right\}$$

$$= \frac{\bar{x} - \alpha}{\beta}$$
5

5

$$\sigma_y = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n}$$

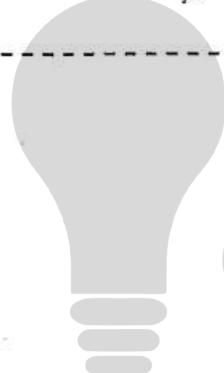
$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \alpha}{\beta} - \frac{\bar{x} - \alpha}{\beta} \right)^2$$

$$= \frac{1}{n\beta} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{\sigma_x^2}{\beta^2} \quad (5)$$

$$6y = \frac{6x}{\beta}$$

20



Education

கல்வி

அடியாளத்துவம்

(5)

(5)

(5)

Class Interval x	f	Class Interval	Mid-point y	fy	fy^2
1500-3500	30	1-3	2	60	120
3500-5500	40	3-5	4	160	640
5500-7500	20	5-7	6	120	720
7500-9500	10	7-9	8	80	640
				$\sum f_y = 420$	$\sum f_y^2 = 2120$

(5)

(5)

(5)

(5)

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum f_y^2}{\sum f} - \bar{y}^2} = \sqrt{\frac{2120}{100} - 4.2^2}$$

$$= \sqrt{21.2 - 17.64}$$

$$= \sqrt{3.56} \approx 1.887$$

(5)

Let M_y = Median of $y = 50^{\text{th}}$ data

எனவே

$$M_y = 3 + \frac{(50 - 30)}{40} (5 - 3) = 4 \quad (5)$$

\therefore ஒரயாக்குணகம் of $y \approx \frac{3(4.2 - 4)}{\sqrt{3.56}} \approx 0.317$

(5)

50

$$\bar{x} = 1000\bar{y} + 500$$

$$= 1000 \times 4.2 + 500$$

(5)

$$= 4700$$

$$\sigma_x = 1000 \sigma_y$$

$$\approx 1000 \times 1.887$$

(5)

$$= 1887$$

ஒரயாக்குணகம் மாறவில்லை

$$S_x = S_y \approx 0.317$$

5

15







எங்கள் குறிக்கோள்

எண்ணிம உலகத்தில் மாணவர்களிற்கென
சிறந்ததொரு கற்றல் கட்டமைப்பை உருவாக்குதல்.

அனைத்தும் டிஜிட்டல் மயப்படுத்தப்பட்ட இந்த காலத்தில் பல்வேறு துறைகளும் கால ஓட்டத்துடன் இணைந்து டிஜிட்டல் தளத்தில் பல்கிப்பெருகி வருகின்றன. அந்த வகையில் கல்வித்துறையும் இதற்கு விதிவிலக்கல்ல. இணையவழி கல்வியின் மூலம் கலவித்துறை புதியதொரு பரிமாணத்தை எட்டியுள்ளது. குறிப்பாக கொரோனா பேரிடர் காலத்தில் நாடே முடக்கப்பட்டிருந்தது. இதனால் மாணவர்களிற்கும் பாடசாலை, கல்வி நிறுவனங்களிற்கு இடையிலான தொடர்பு துண்டிக்கப்பட்டது. அந்த இக்கட்டான் சூழ்நிலையில் இணையவழி வகுப்புகள் மாணவர்களிற்கு வரப்பிரசாதமாக அமைந்தது என்பதே உண்மை.

இன்று தொழில்நுட்பம் மாணவர்களை தவறான பாதைக்கு இட்டு செல்வதாக ஓர் எண்ண ஓட்டம் மக்கள் மத்தியில் உள்ளது. தொழில்நுட்பம் என்பது ஒரு கருவி மட்டுமே அதை எவ்வாறு பயன்படுத்துகிறோம் என்பதில் அதன் ஆக்க மற்றும் அழிவு விளைவுகள் தீர்மானிக்கப்படுகிறது. உளியை கொண்டு சிலையை செதுக்க நினைத்தால் அவன் நிச்சயம் சிற்பி ஆகலாம். இங்கு பிரச்சினையாக காணப்படுவது மாணவர்களை வழிப்படுத்த தொழில்நுட்ப உலகில் ஓர் முறையான கட்டமைப்பு இல்லாமையே. அதை உருவாக்குவதே எங்கள் நோக்கம். அதை நோக்கியே எங்கள் பயணம் அமையும்.

எமது இணையத்தினாடக ஊடாக உங்களிற்கு தேவையான பர்த்சை வினாத்தாள்களை இலகுவான முறையில் தரவிறக்கம் செய்து கொள்ளமுடியும்.

kalvi.lk

கல்வி சார் செய்திகளை உடனுக்குடன் அறிந்து கொள்ள எமது சமூக ஊடக தளங்களின் ஊடாக உடனுக்குடன் அறிந்து கொள்ள முடியும்.



Viber
Community



WhatsApp
Channel



Facebook
Page